

Programación lineal

PROGRAMACIÓN LINEAL

PROGRAMACIÓN LINEAL se formula siguiendo el planteamiento general:

$$\min_x z$$

← Función objetivo

s.t.

$$h(x) = 0$$

← Restricciones de igualdad

$$g(x) \leq 0$$

← Restricciones de desigualdad

$$x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$$

← Límite variables

PROGRAMACIÓN LINEAL

La formulación se debe expresar como:

$$\min_x z = c^T x$$

← Función objetivo

s.t.

$$A_h x = b_h$$

← Restricciones de igualdad

$$A_g x \geq b_g$$

← Restricciones de desigualdad

$$x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$$

← Límite variables

PROGRAMACIÓN LINEAL

Símbolos empleados

a_{ij} = coefficient of variable j (column) in i^{th} constraint equation (row)

A = matrix with elements a_{ij} (termed LHS)

b = vector of constraint RHS values with elements b_i

c_j = objective coefficient for variable j

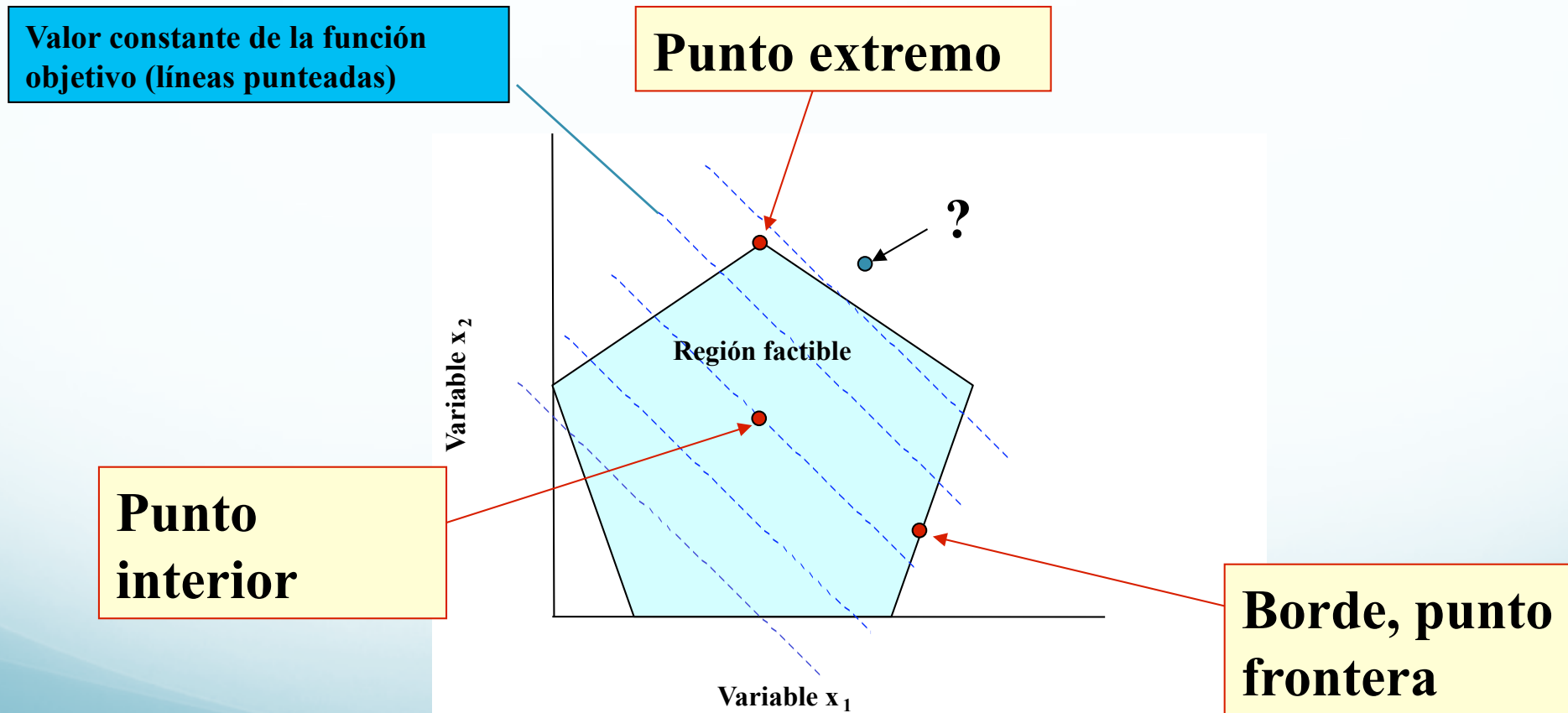
m = number of constraints

n = number of variables

z = Función objetivo = $\sum c_j x_j$

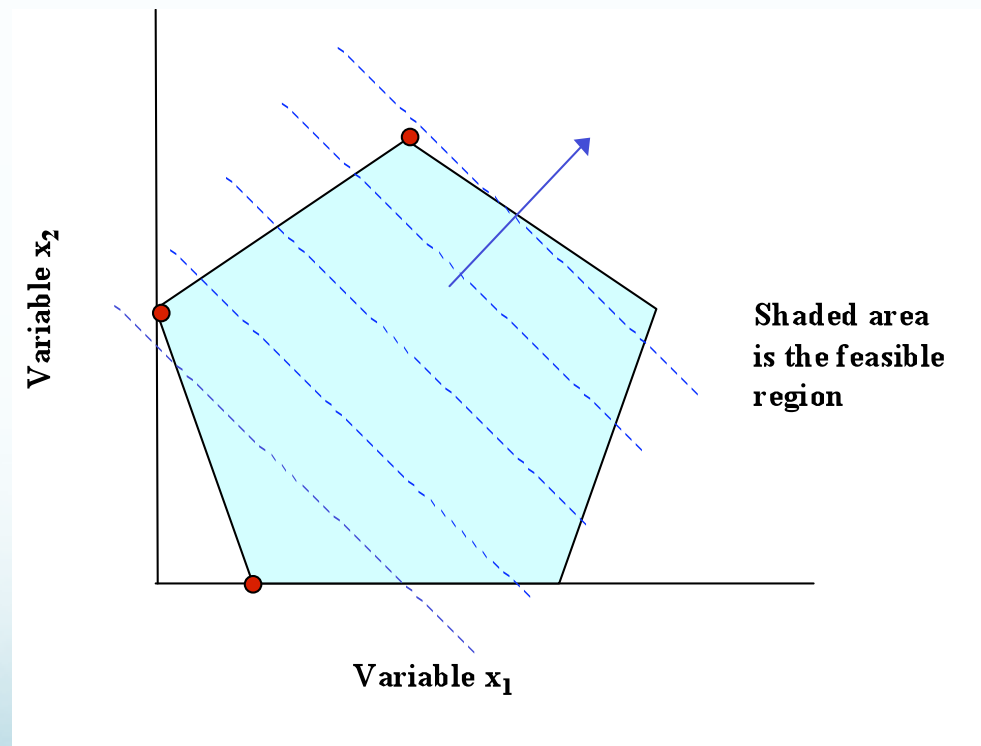
PROGRAMACIÓN LINEAL

La región factible tiene tres tipos de puntos.



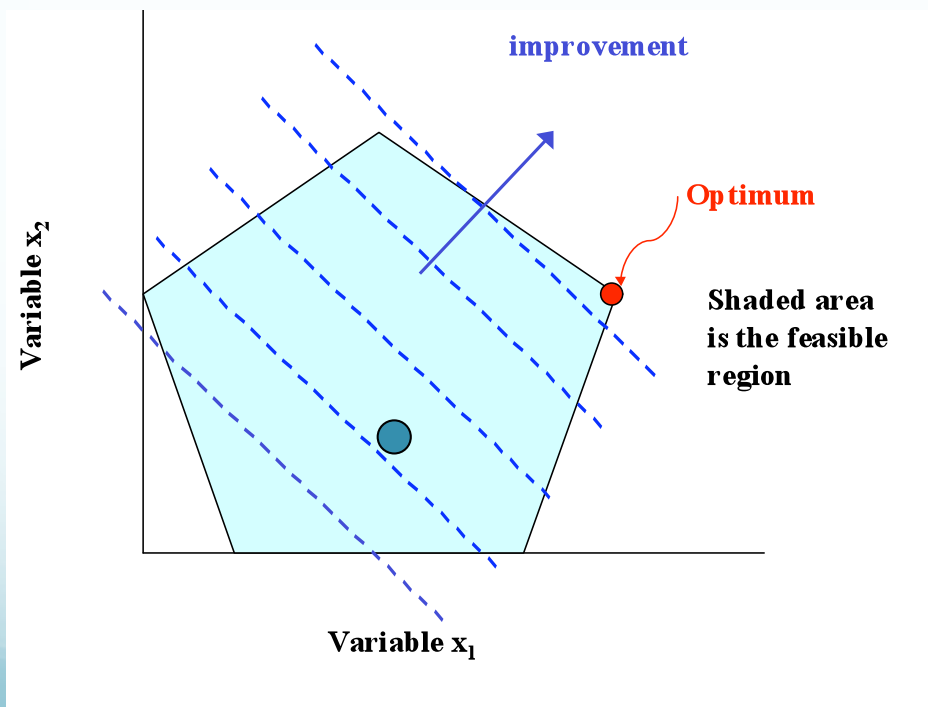
PROGRAMACIÓN LINEAL

Punto extremo: Un punto es extremo si cualquier segmento de la región factible que contiene al punto tiene a éste al final del segmento. También conocido como vértice.



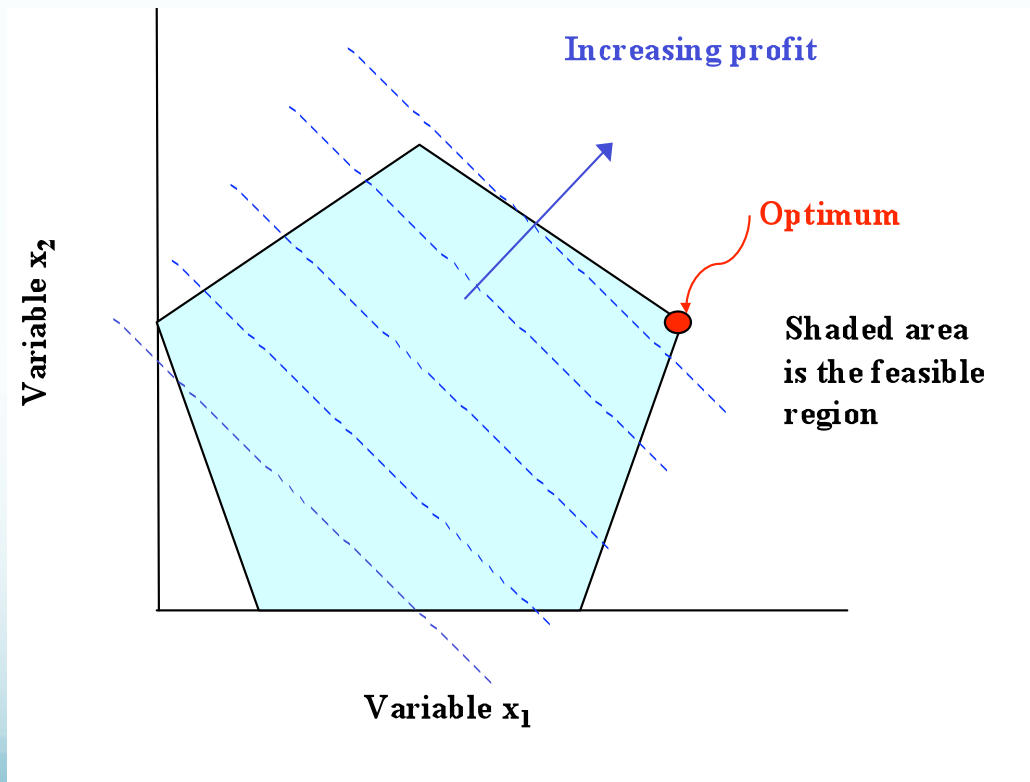
PROGRAMACIÓN LINEAL

El mejor vértice debe ser el valor óptimo de la función objetivo! Si el problema tiene solución óptima ésta debe de estar en un vértice; si tiene múltiples soluciones óptimas al menos dos deben de estar en punto extremos.



PROGRAMACIÓN LINEAL

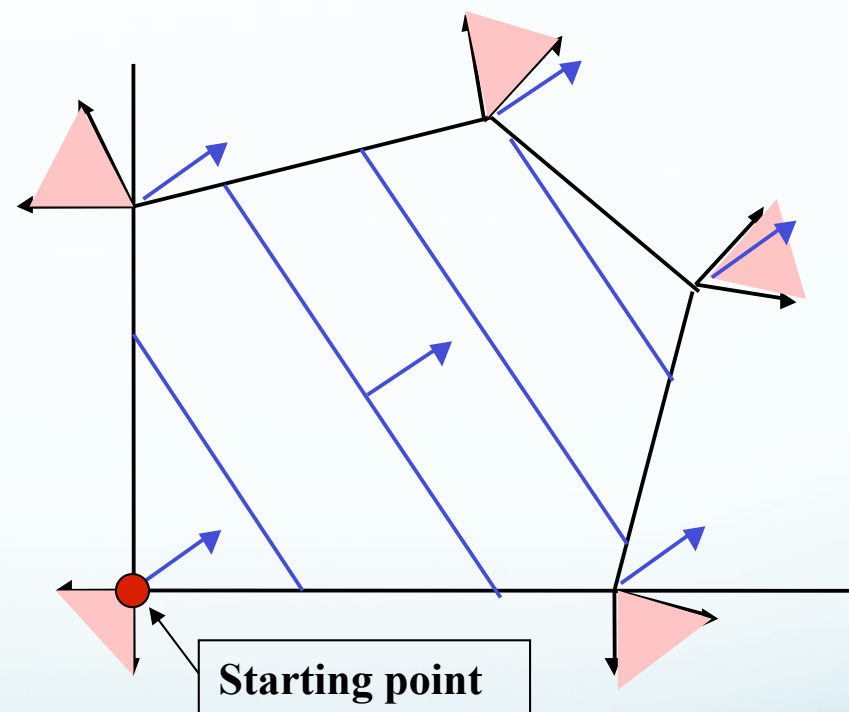
Es un problema de optimización convexa; luego, ¿un óptimo local es un óptimo global!



PROGRAMACIÓN LINEAL

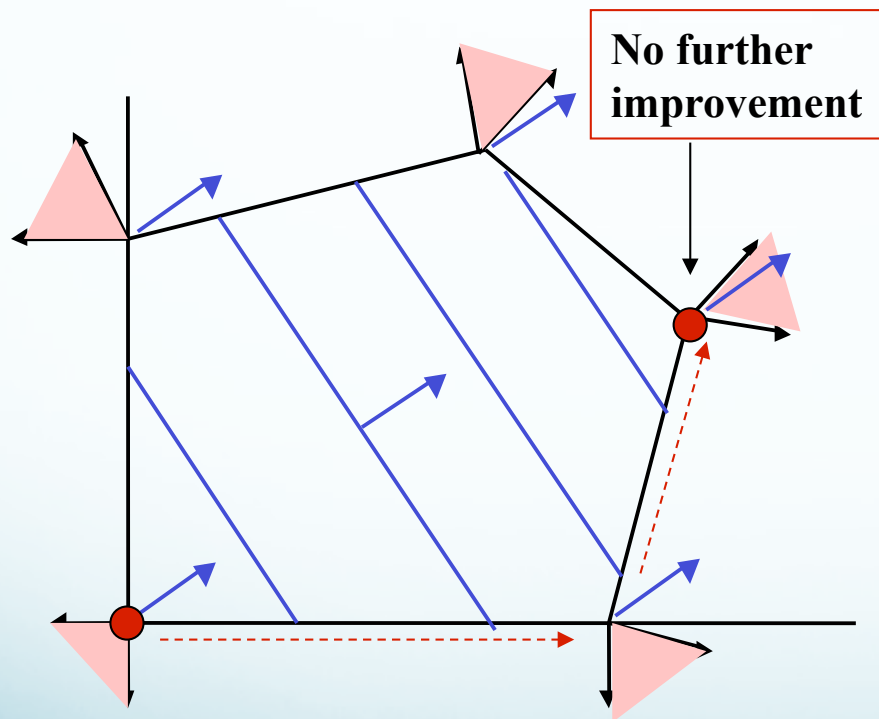
BASIC NUMERICAL OPTIMIZATION

- We only have local information at the “current” point in an iterative scheme.
- We determine a good next point, which will improve the objective value
- We check if further improvement is possible. If yes, continue
- Stop at local optimum.



PROGRAMACIÓN LINEAL

Basis of the Simplex Algorithm



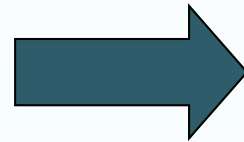
One approach would

- Consider only adjacent corner points for improvement direction.
- Move along the edge that yields the greatest rate of improvement
- Move until another corner point has been reached
- If further improvement is possible, iterate.

PROGRAMACIÓN LINEAL

The **Simplex algorithm** - Using the Corner Point concept as the foundation for an efficient solution method.

We want to convert this general formulation to a system of linear equations - we know how to solve these!



$$\min_x z = c^T x$$

s.t.

$$A_h x = b_h$$

$$A_1 x \geq b_1$$

$$A_2 x \leq b_2$$

$$x \geq 0$$

PROGRAMACIÓN LINEAL

Standard formulation of LPs

$$\min_x z = c^T x$$

s.t.

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

How can we formulate the problem...

- If we want to maximize a function?

Use the negative of the same function. *Max f = Min -f*

$$\begin{array}{ll}\min_x & z = c^T x \\ \text{s.t.} & \\ & Ax = b \\ & x \geq 0\end{array}$$

- If we have unconstrained variables, i.e., x may be negative?

x may be written as the difference of **two non-negative** variables, $x = x_1 - x_2$

- If we have inequalities (besides the equalities)?

We can add **non-negative additional (slack) variables** and convert the inequality into an equality.

PROGRAMACIÓN LINEAL

We will add “slack” variables to all inequalities to convert them to equalities.

Original expression

$$5x_1 + 7x_2 - 2.3x_3 \leq 37$$

$$5x_1 + 7x_2 - 2.3x_3 \geq 37$$

$$5x_1 + 7x_2 - 2.3x_3 = 37$$



PROGRAMACIÓN LINEAL

The **Simplex algorithm** - Using the Corner Point concept as the foundation for a solution method.

We have the LP problem in “**Standard Form**”. Note that the system has more variables than equations.

$$\min_x z = c^T x$$

s.t.

$$A x = b$$

$$x \geq 0 \quad [\text{note that ultimately, } x_{\min} \leq x \leq x_{\max}]$$

The vector x of variables now includes the slack variables.

Some definitions...

- **Feasible solution.** A solution that satisfies the constraints
- **Basic solution.** A solution in which $n-m$ variables are set equal to zero, and the remaining systems of equations is solved.
- **Basis.** The collection of variables not set equal to zero to obtain the basic solution
- **Basic feasible solution.** This is a basic solution that satisfies the non-negativity conditions.
- **Nondegenerate basic feasible solution.** This is a basic feasible solution that has got exactly m positive x_i .
- **Optimal solution.** A feasible solution that optimizes the Función objetivo.
- **Optimal basic solution.** This is a basic feasible solution for which the Función objetivo is optimal.

PROGRAMACIÓN LINEAL

The Simplex Algorithm: Finding a solution for “non-square set of equations

$$\begin{array}{cc}
 \text{Basic} & \text{Non-basic} \\
 \left[\begin{array}{ccc} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & & \\ a_{m1} & & a_{mm} \end{array} \right] & \left[\begin{array}{ccc} a_{1,m+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m,m+1} & \dots & a_{mn} \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Original, non-square equation set of constraints in standard form

$$\left[\begin{array}{ccc} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & & \\ a_{m1} & & a_{mm} \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Square set of equations that can be solved for the basic variables

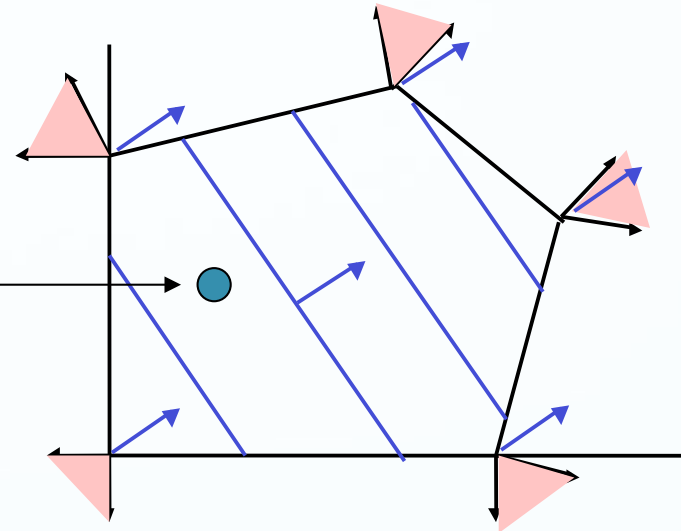
$$\begin{bmatrix} x_{m+1} \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Non-basic variables which take the values that optimize the objective. The values will be at an extreme of allowed range.

PROGRAMACIÓN LINEAL

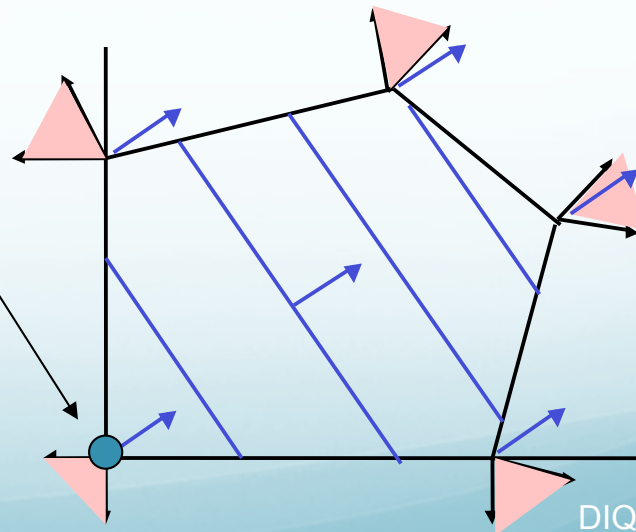
FEASIBLE SOLUTION

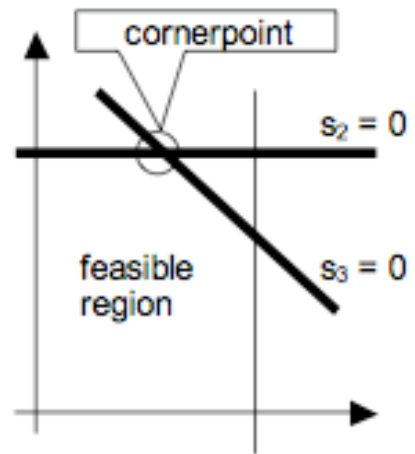
Any selection of values for the non-basic variables that result in all variables being non-negative yields a feasible solution.



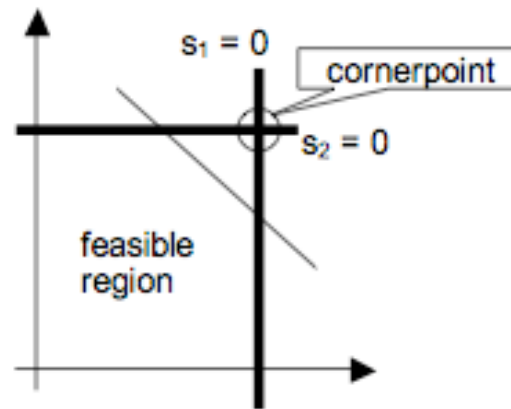
BASIC FEASIBLE SOLUTION

A selection of 0.0 values for the non-basic variables result in basic variables being non-negative and yields a corner point.





(a) feasible cornerpoint



(b) infeasible cornerpoint

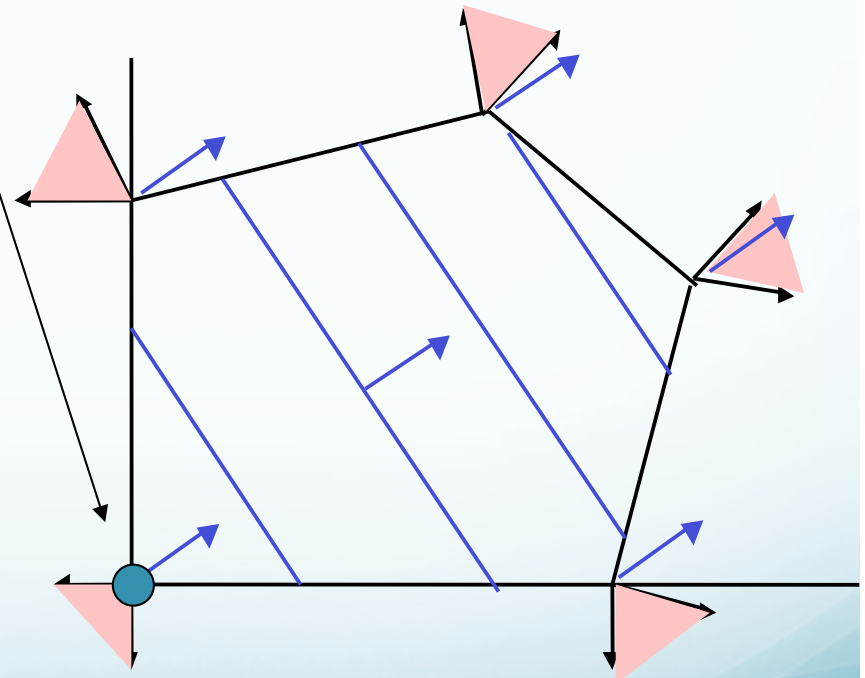
PROGRAMACIÓN LINEAL

The Simplex Algorithm

Using the Corner Point concept as the foundation for a solution using the Simplex Algorithm.

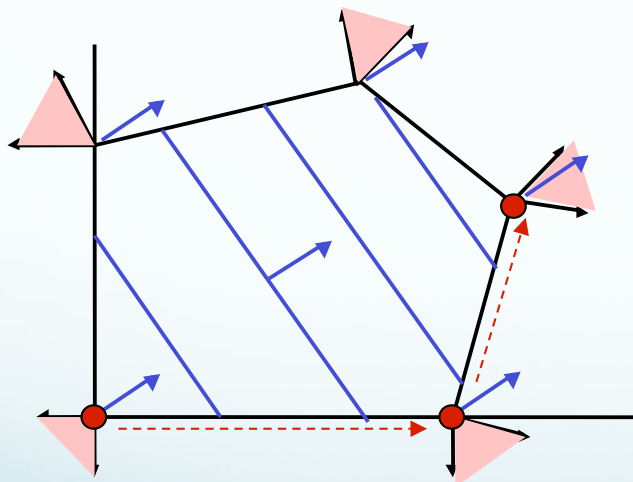
Start here

1. Are we optimal;
2. Move along an edge to an adjacent corner point.
3. This adds one variable to the basis and removes another variable from the basis.



PROGRAMACIÓN LINEAL

Moving between adjacent corner points is achieved by changing one variable from basic to non-basic and one non-basic to basic. (The new variables must form a basis.)



The Simplex Algorithm

- Consider only adjacent corner points for improvement direction. ← - - -
- Move along the edge that yields the greatest rate of improvement
- Move until another corner point has been reached
- If further improvement is possible, iterate. - - -

Algoritmo Simplex: Procedimiento.

$$\begin{array}{ll}\text{Mín:} & f(\underline{x}) = -x_1 + x_2 \\ \text{Sujeto a:} & 2x_1 - x_2 \geq -2 \\ & -x_1 + 3x_2 \geq -2 \\ & -x_1 - x_2 \geq -4 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

Etapla 0. Transformar las restricciones de desigualdad para que todos los bj sean positivos.

$$\begin{array}{ll}\text{Mín:} & f(\underline{x}) = -x_1 + x_2 \\ \text{Sujeto a:} & -2x_1 + x_2 \leq 2 \quad (\text{A}) \\ & x_1 - 3x_2 \leq 2 \quad (\text{B}) \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \quad (\text{C}) \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

Problema original

Etapla Introducir las variables de holgura (slack variables).

$$\begin{array}{ll}\text{Mín:} & f(\underline{x}) = -x_1 + x_2 \\ \text{Sujeto a:} & -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \quad (\text{A}) \\ & x_1 - 3x_2 + x_4 = 2 \quad (\text{B}) \\ & x_1 + x_2 + x_5 = 4 \quad (\text{C}) \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0\end{array}$$

Problema aumentado

¿Grados de libertad?

Etapla 2. Encontrar una solución que esté en un vértice de la región factible.

2 grados de libertad. 2 variables independientes.

2 variables NO BÁSICAS

3 variables dependientes.

3 variables BÁSICAS

$$x_1=0$$

$$x_2=0$$



$$f(\underline{x}) = 0$$

$$x_3 = 2 \quad (A)$$

$$x_4 = 2 \quad (B)$$

$$x_5 = 4 \quad (C)$$

Mín: $f(\underline{x}) = -x_1 + x_2$

Sujeto a: $-2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \quad (A)$

$$x_1 - 3x_2 + x_4 = 2 \quad (B)$$

$$x_1 + x_2 + x_5 = 4 \quad (C)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Etapla 3. Buscar una nueva solución factible que vaya disminuyendo el objetivo.

$$f(\underline{x}) - \sum_i c_i x_i = 0$$

Eliminar como variable no básica la de mayor valor

$$\min \left(\frac{b_j}{a_{jl}} \right) \geq 0$$

Escoger como nueva no básica la de menor valor positivo

$$(A) : 2 / -2 = -1$$

$$(B) : 2 / 1 = 2$$

$$(C) : 4 / 1 = 4$$

(C) x_4 en este caso

Eliminar como variable no básica la de mayor valor -ci

Es la variable que más influye en la función objetivo

Escoger como nueva no básica la de menor valor positivo

Es la variable que llega antes a una restricción.

$$f(\underline{x}) = 0$$

$$x_3 = 2 \quad (A)$$

$$x_4 = 2 \quad (B)$$

$$x_5 = 4 \quad (C)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Mín:} & f(\underline{x}) = -x_1 + x_2 \\ \text{Sujeto a:} & -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \quad (A) \\ & x_1 - 3x_2 + x_4 = 2 \quad (B) \\ & x_1 + x_2 + x_5 = 4 \quad (C) \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0$$

$$x_1 - 3 \cdot 0 + x_4 = 2$$



$$x_4 = 2 - x_1$$

Máximo valor de $x_1 = 2$
para que $x_4 \geq 0$

$$x_1 - 0 + x_5 = 4$$



$$x_5 = 4 - x_1$$

Máximo valor de $x_1 = 4$
para que $x_5 \geq 0$

Si se escogiera el mayor valor, entonces x_1 podría llegar a valer hasta 4 con lo cual tendríamos un valor de x_4 negativo.

Etapa 4. Transformar las ecuaciones de acuerdo a la nueva distribución de variables.

Variables básicas: x_1, x_3, x_5

Variables no básicas: x_2, x_4

Restricción más desfavorable

$$(B) : x_1 = 2 + 3x_2 - x_4$$



$$(A): -2(2 + 3x_2 - x_4) + x_2 + x_3 = 2 \Rightarrow x_3 - 5x_2 + 2x_4 = 6$$

$$(B): x_1 - 3x_2 + x_4 = 2$$

$$(C): (2 + 3x_2 - x_4) + x_2 + x_5 = 4 \Rightarrow x_5 + 4x_2 - x_4 = 2$$

$$f + (2 + 3x_2 - x_4) - x_2 = 0 \Rightarrow f + 2x_2 - x_4 = -2$$

Se continua el procedimiento hasta....?

Todos los coeficientes de la función objetivo son negativos.

Procedimiento en forma de tabla

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	f	b	
x_3	-2	1	1	0	0	0	2	
x_4	[1]	-3	0	1	0	0	2	← fila pivote
x_5	1	1	0	0	1	0	4	
	1	-1	0	0	0	1	0	

columna
pivote

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	f	b	
x_3	0	-5	1	2	0	0	6	
x_1	1	-3	0	1	0	0	2	
x_5	0	4	0	-1	1	0	2	←
	0	2	0	-1	0	1	-2	

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	f	b
x_3	0	0	1	0.75	1.25	0	8.5
x_1	1	0	0	0.25	0.75	0	3.5
x_2	0	1	0	-0.25	0.25	0	0.5
	0	0	0	-0.5	-0.5	1	-3

$$\begin{aligned} x_3 &= 8.5 \\ x_1 &= 3.5 \\ x_2 &= 0.5 \end{aligned}$$

Forma canónica

$$\begin{array}{ll}\text{Mín:} & f(\underline{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ \text{Sujeto a:} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \\ & x_i \geq 0 ; b_j \geq 0 \quad (i = 1, n ; j = 1, m)\end{array}$$

Cuando la solución básica factible inicial no es trivial:

Método de las dos fases

Método de la gran M

Método de las dos fases

$$\text{Mín:} \quad f = x_1 + 2x_2$$

$$\text{Sujeto a:} \quad 3x_1 + 4x_2 \geq 5$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$\text{Mín:} \quad f = x_1 + 2x_2$$

$$\text{Sujeto a:} \quad 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 5 \quad (\text{A})$$

$$x_1 + x_2 + x_4 = 4 \quad (\text{B})$$

$$x_i \geq 0$$

$$w + \left(\sum_{i=1}^m a_{i1} \right) x_1 + \left(\sum_{i=1}^m a_{i2} \right) x_2 + \dots + \left(\sum_{i=1}^m a_{in} \right) x_n = \sum_{i=1}^m b_i$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2$$

$$\vdots \quad \ddots \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m$$

Fase I

Mín: $f = x_1 + 2x_2$

Sujeto a: $3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_5 = 5$ (A)

$x_1 + x_2 + x_4 + x_6 = 4$ (B)

$x_i \geq 0$

$w + 4x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 = 9$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	w	b	
3	4	-1	0	1	0	0	5	←
1	1	0	1	0	1	0	4	
4	5	-1	1	0	0	1	9	

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	w	b	
0.75	1	-0.25	0	0.25	0	0	1.25	
0.25	0	0.25	1	-0.25	1	0	2.75	←
0.25	0	0.25	1	-1.25	0	1	2.75	

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	w	b
1	1	0	1	0	1	0	4
1	0	1	4	-1	4	0	11
0	0	0	0	-1	-1	1	0

Fase II

Mín: $f = x_1 + 2x_2$

Sujeto a: $3x_1 + 4x_2 - x_3 = 5$ (A) $x_2 = 4$; $x_3 = 11$.

$x_1 + x_2 + x_4 = 4$ (B)

$x_i \geq 0$

$$f = x_1 + 2(4 - x_1 - x_4) \Rightarrow f + x_1 + 2x_4 = 8$$

x_1	x_2	x_3	x_4	f	b	
1	1	0	1	0	4	
1	0	1	4	0	11	←
1	0	0	2	1	8	
			↑			

x_1	x_2	x_3	x_4	f	b	
0.75	1	-0.25	0	0	1.25	←
0.25	0	0.25	1	0	2.75	
1	0	-0.5	0	1	2.50	
↑						

	x_1	x_2	x_3	x_4	f	b
x_1	1	1.33	-0.33	0	0	1.67
x_4	0	-0.33	0.33	1	0	2.33
	0	-0.67	-0.33	0	1	1.67

$$x_1 = 1.67 ; x_2 = 0 ; x_3 = 0 ; x_4 = 2.33 ; f = 1.67$$

Resolver mediante el método de las dos fases

Maximize $z = x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 - x_5 + 2x_6$
subject to

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 12$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 = 18$$

$$3x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 24$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 6.$$

FASE 1

Se añaden 3 variables artificiales

$$\text{Minimize } z' = y_1 + y_2 + y_3$$

subject to

$$\left. \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 & + y_1 & = 12 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 & + y_2 & = 18 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 & + y_3 & = 24 \end{array} \right\}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 6; \quad y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3$$

$$z' + y_1 + y_2 + y_3 = 0.$$

$$z' - 5x_1 - 10x_2 - 5x_3 - 3x_4 - 6x_5 - x_6 = -54.$$

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$$

$$y_1 = 12, \quad y_2 = 18, \quad y_3 = 24$$

Tabla inicial

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	y_3	
y_1	1	2	2	1	1	0	1	0	0	12
y_2	1	2	1	1	2	1	0	1	0	18
y_3	3	⑥	2	1	3	0	0	0	1	24
	-5	-10	-5	-3	-6	-1	0	0	0	-54

En este caso escoger la columna del más negativo coeficiente de la función objetivo

$$\min\left\{\frac{12}{2}, \frac{18}{2}, \frac{24}{6}\right\} = \frac{24}{6} = 4,$$

↓

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	y_3	
← y_1	0	0	$\left(\frac{4}{3}\right)$	$\frac{2}{3}$	0	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	4
y_2	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	1	0	1	$-\frac{1}{3}$	10
x_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{6}$	4
	0	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{4}{3}$	-1	-1	0	0	$\frac{5}{3}$	-14

↓

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	y_3	
← x_3	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	3
y_2	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\textcircled{1}$	$-\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	9
x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	3
	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	-1	-1	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	-9

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	y_3	
x_3	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	3
x_6	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	1	$-\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	9
x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	3
	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0

Iteraciones hasta
que la función
objetivo sea cero

$$x_2 = 3, \quad x_3 = 3, \quad x_6 = 9$$

$$x_1 = x_4 = x_5 = y_1 = y_2 = y_3 = 0$$

FASE 2

Reescribir función obetivo $z = x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 - x_5 + 2x_6.$

↓

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	3
x_6	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	1	9
← x_2	$\left(\frac{1}{2}\right)$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	3
	-2	0	0	$\frac{1}{2}$	2	0	3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	3
x_6	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	1	9
x_1	1	2	0	0	1	0	6
	0	4	0	$\frac{1}{2}$	4	0	15

Análisis de sensibilidad

Cómo afecta el cambio de parámetros en la solución.



Problema

$$\min \quad z = 2x_1 + 3x_2$$

s.t.

$$0.5x_1 + 0.25x_2 \leq 4$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 20$$

$$x_1 + x_2 = 10$$

$$x_i \geq 0 \quad \text{for } i = 1, 2$$



Cómo afecta un cambio
en este parámetro en z y
en los valores de x^* ?

¡Sin tener que resolver
de nuevo el problema!

Los coeficientes de la función objetivo de las variables originales se denominan: **costes reducidos**

Los coeficientes de la función objetivo de las demás variables (holgura) se denominan: **precios sombra o duales**

En el **óptimo**:

O la variable es cero (no básica) o el precio dual o el coste reducido es cero.

En el caso de que ambos sean cero:

Existe **solución degenerada** si la variable es básica

Existen **múltiples óptimos** si la variable es no básica

Análisis de sensibilidad

- **Sensibilidad= $\Delta z/\Delta\alpha$ con todas las variables básicas, x_B , pueden cambiar luego la solución es un nuevo óptimo.**

- 1. Los resultados se limitan a los óptimos con las mismas restricciones activas que el caso base, es decir, no requiere cambiar la base escogida.**
- 2. Los resultados definen el rango de cambio de parámetros (coeficientes función objetivo o constantes de RHS) que implican que no hay cambio en las restricciones activas.**
- 3. El resultado proporciona un valor exacto, cuantitativo de $\Delta OBJ^*/\Delta \text{parametro}$**

Análisis de sensibilidad

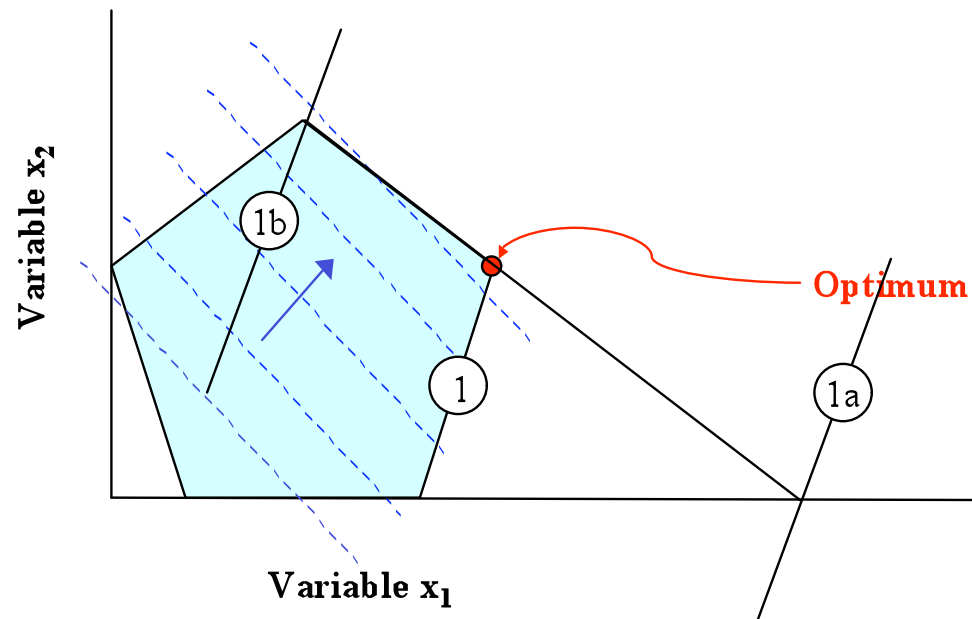
El software presenta informes con el **valor y rango** de la sensibilidad de cada restricción. Fuera de ese rango la base cambia.

Constraint ID	Status (Binding/ non-binding) (Active/inactive)	slack	Shadow price (sensitivity of rhs)	Maximum allowable increase (AI)	Maximum allowable decrease (AD)
Max. Reflux flow	Active	0	3.74	47	123
Max. Pump 7	Inactive	321	0	1.0E30	321

Shadow price = $\Delta\text{OBJ}^*/\Delta\text{RHS}$, has units!

Análisis de sensibilidad

Cambios en el parámetro RHS



Cuánto puedo cambiar la restricción 1 sin cambiar de base?

Los valores de x^* cambian!

Los valores de las variables (si la restricción está activa) y de la función objetivo variarán, pero la base permanece.

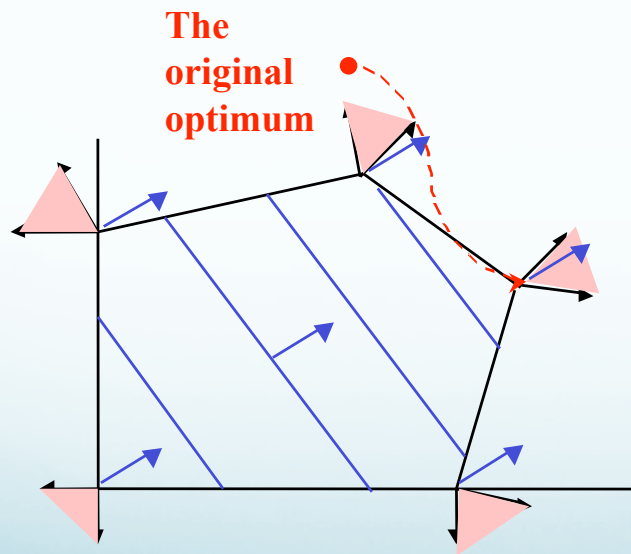
El nuevo valor de la función objetivo será:

$$Z_{new} = Z_{original} - \text{precio sombra} \times \Delta b$$

Análisis de sensibilidad

$$\text{Función objetivo} = z = \sum c_j x_j$$

Sensibilidad a un cambio en un coeficiente de la función objetivo.



Original problem

Cambios en c_j que no cambian la base,

$$\Delta x = 0$$

$$\Delta z = \Delta \sum c_j x_j = \sum \Delta c_j (x_j)$$

$$= \Delta c_k (x_k)$$

Donde k = el coeficiente cambiado

Los valores de *las variables en el nuevo óptimo no cambian*, al no variar las restricciones y no cambiar la base. Luego el óptimo es el mismo punto en el espacio.

El nuevo valor objetivo se calcula poniendo los valores de las variables en la nueva función objetivo, dado que cada vez se varía un coeficiente se puede calcular el cambio en la función objetivo debido a un cambio en el coeficiente.

Análisis de sensibilidad

$$\min_x z = c^T x$$

s.t.

$$A x = b$$

En general cambios en los coeficiente “A” del LHS, implican que el problema se debe resolver de nuevo.

$$x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$$