Programación lineal

PROGRAMACIÓN LINEAL

PROGRAMACIÓN LINEAL se formula siguiendo el planteamiento general:

$$\min_{x} z$$

Función objetivo

$$s.t.$$

$$h(x) = 0$$

Restricciones de igualdad

Restricciones de desigualdad

$$g(x) \leq 0$$

Límite variables

$$x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$$

PROGRAMACIÓN LINEAL

La formulación se debe expresar como:

$$\min_x z = c^T x$$

Función objetivo

$$s.t.$$

$$A_h x = b_h$$

Restricciones de igualdad

$$A_g x \geq b_g$$

Restricciones de desigualdad

$$x_{min} \leq x \leq x_{max}$$

Límite variables

PROGRAMACIÓN LINEAL

Símbolos empleados

a_{ij} = coefficient of variable j (column) in i^{th} constraint equation (row)

A = matrix with elements a_{ij} (termed LHS)

b = vector of constraint RHS values with elements b_i

c_j = objective coefficient for variable j

m = number of constraints

n = number of variables

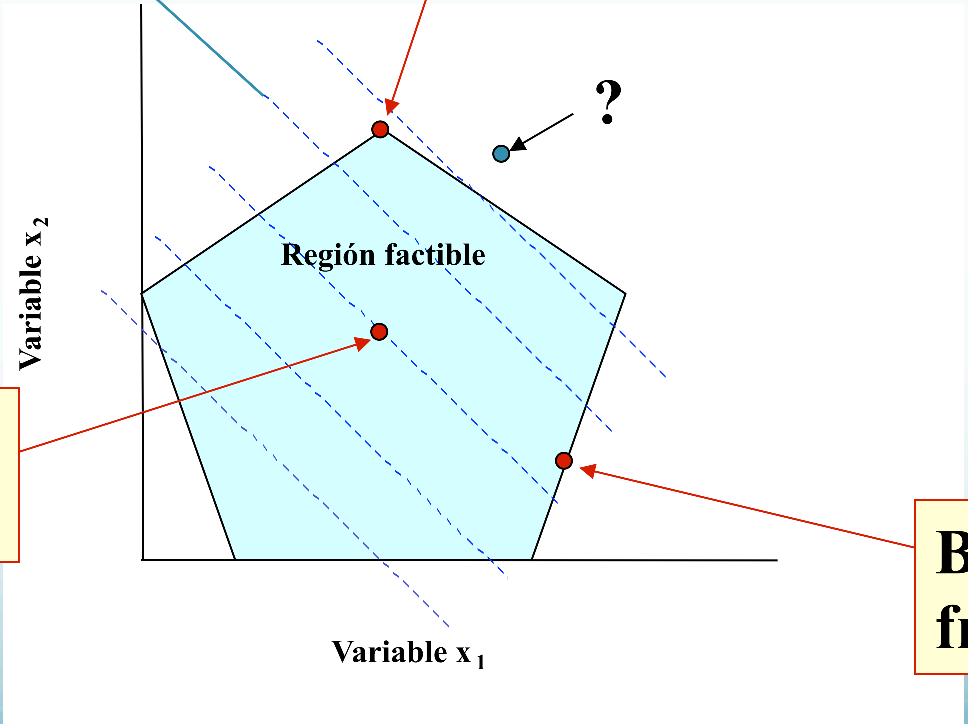
z = Función objetivo = $\Sigma c_j x_j$

PROGRAMACIÓN LINEAL

La región factible tiene tres tipos de puntos.

Valor constante de la función objetivo (líneas punteadas)

Punto extremo

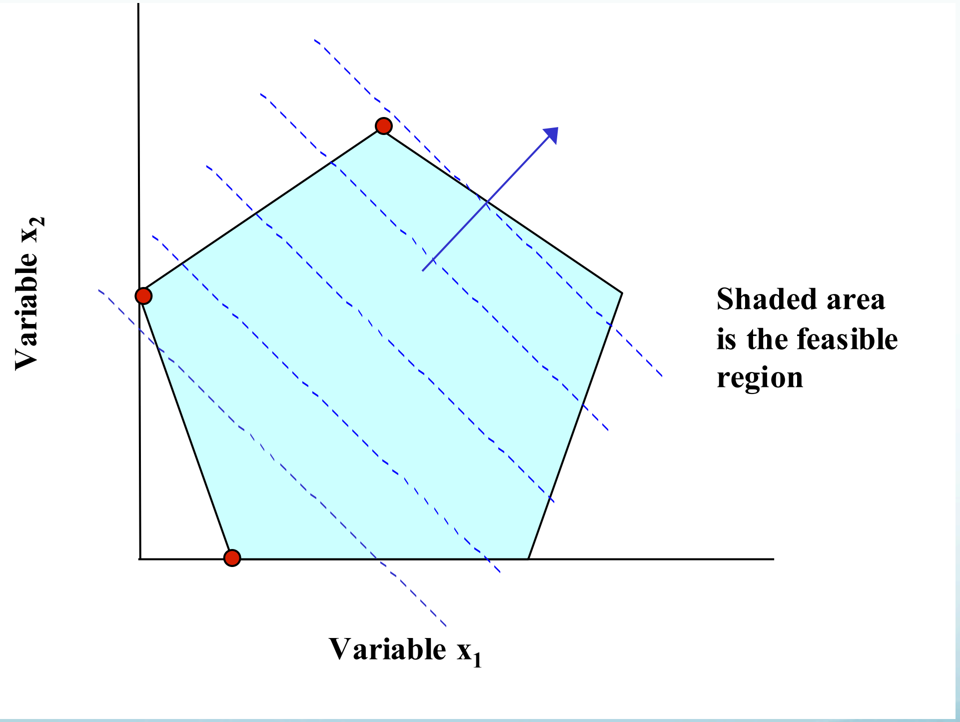


Punto interior

Borde, punto frontera

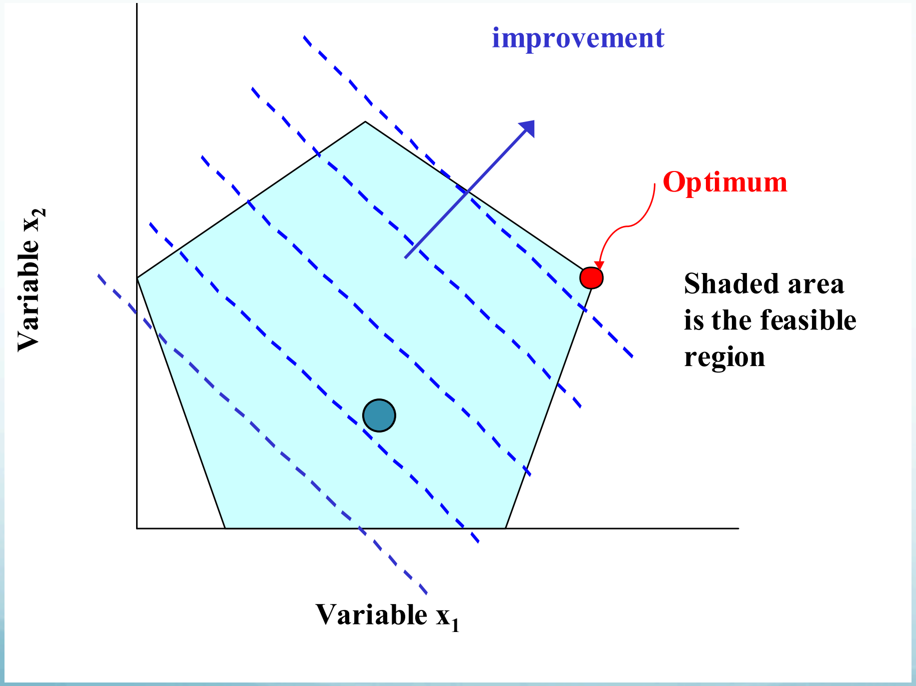
PROGRAMACIÓN LINEAL

Punto extremo: Un punto es extremo si cualquier segmento de la región factible que contiene al punto tiene a éste al final del segmento. También conocido como vértice.



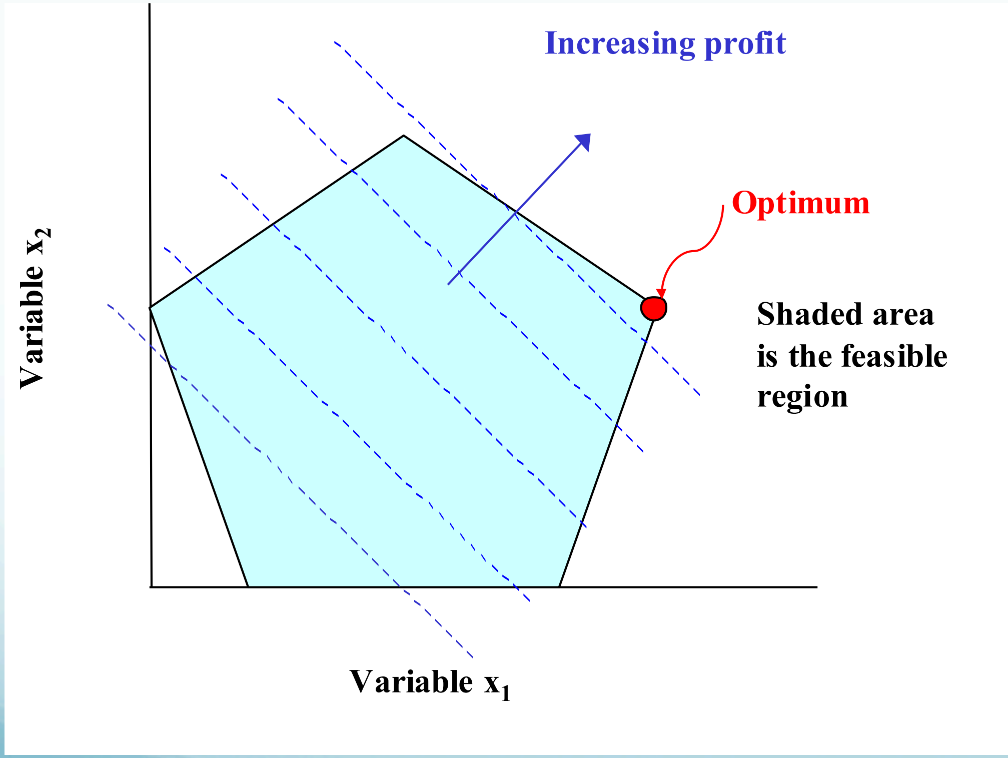
PROGRAMACIÓN LINEAL

El mejor vértice debe ser el valor óptimo de la función objetivo! Si el problema tiene solución óptima ésta debe de estar en un vértice; si tiene múltiples soluciones óptimas al menos dos deben de estar en punto extremos.



PROGRAMACIÓN LINEAL

Es un problema de optimización convexa; luego, ¡un óptimo local es un óptimo global!



OPTIMIZACIÓN NUMÉRICA

Es el único procedimiento (frente a optimización gráfica y analítica que permite abordar problemas complejos.

*Problema: dificultad en encontrar el **óptimo global** en algunos casos.*

Normalmente sólo conocemos el valor de un punto (x_k y $f(x_k)$) y alguna información local adicional (derivadas,…)

Procedimiento básico de optimización numérica

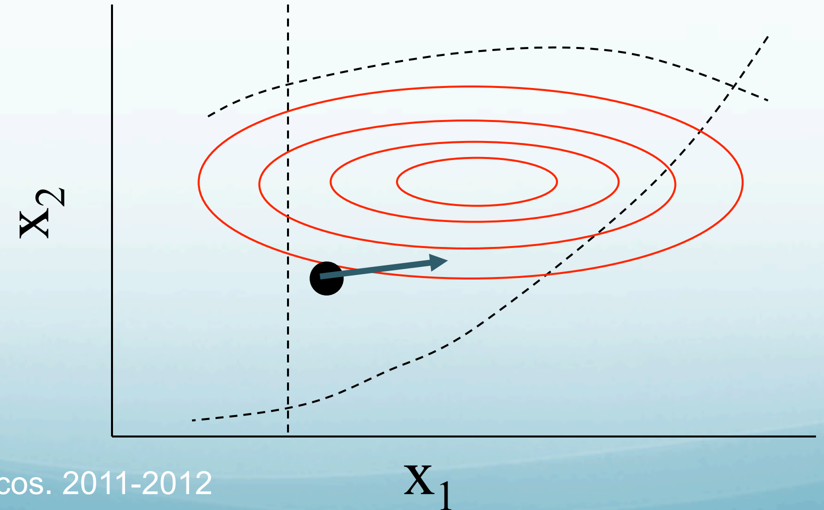
1. Determinar un *buen siguiente punto* que mejore la función objetivo
2. Comprobar si se puede seguir mejorando. Si se puede volver al punto 1.
3. Parar en un mínimo local.

OPTIMIZACIÓN NUMÉRICA

Optimización numérica empleando información local

A partir del punto inicial, cómo decidimos:

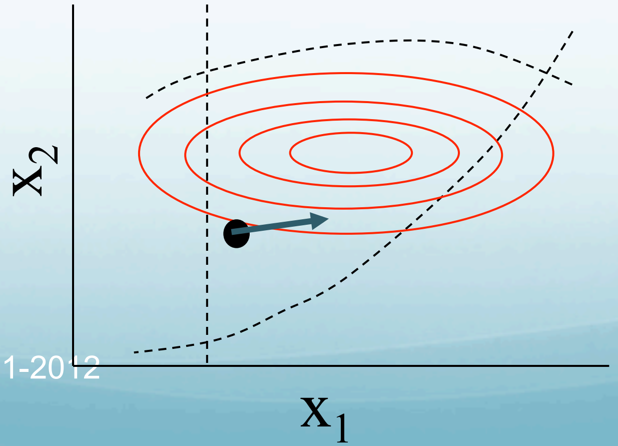
- **La dirección del cambio**
- **La distancia en esa dirección**
- **Si es posible mejorar más**



OPTIMIZACIÓN NUMÉRICA

La ecuación básica:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{bmatrix}_{k+1} = x_k + \alpha \Delta x_k = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{bmatrix}_k + \alpha \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ .. \\ \Delta x_n \end{bmatrix}_k$$



NUMERICAL OPTIMIZATION

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{bmatrix}_{k+1} = x_k + \alpha \Delta x_k = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{bmatrix}_k + \alpha \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ .. \\ \Delta x_n \end{bmatrix}_k$$

escalar

vector

Determina el tamaño del cambio

α >0

Determina la dirección del cambio

Δx >0

NUMERICAL OPTIMIZATION

- ¿Cómo determinamos α and Δx?
- ¿Cómo sabemos cuando parar?

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{bmatrix}_{k+1} = x_k + \alpha \Delta x_k = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{bmatrix}_k + \alpha \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ .. \\ \Delta x_n \end{bmatrix}_k$$

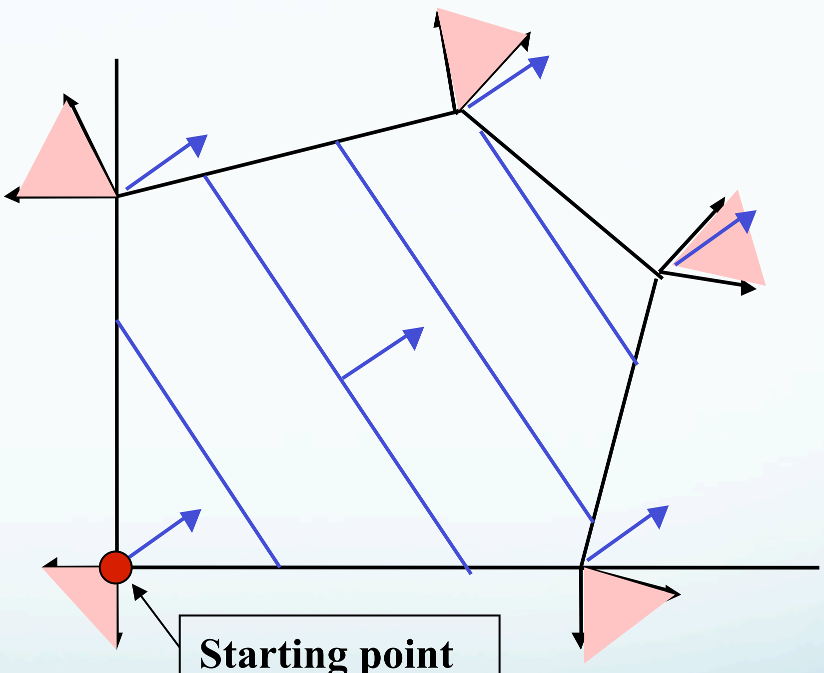
- Debe permanecer en la región factible
- No es demasiado grande, hace que la función objetivo pueda disminuir

- Una dirección posible
- Que mejore la función objetivo

PROGRAMACIÓN LINEAL

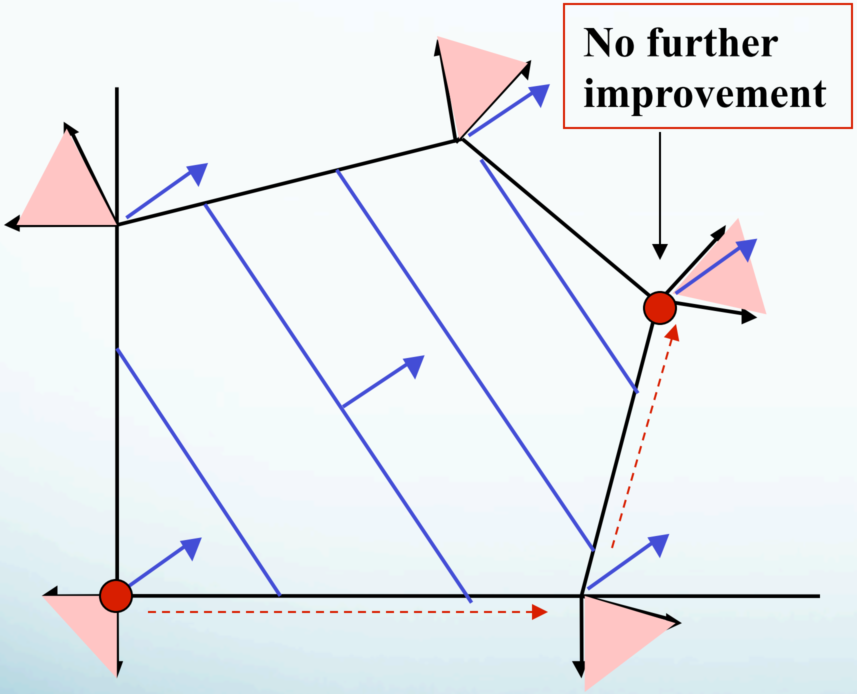
BASIC NUMERICAL OPTIMIZATION

- We only have local information at the "current" point in an iterative scheme.
- We determine a good next point, which will improve the objective value
- We check if further improvement is possible. If yes, continue
- Stop at local optimum.



PROGRAMACIÓN LINEAL

Basis of the Simplex Algorithm



One approach would

- Consider only adjacent corner points for improvement direction.
- Move along the edge that yields the greatest rate of improvement
- Move until another corner point has been reached
- If further improvement is possible, iterate.

Simplex algorithm

PROGRAMACIÓN LINEAL

The Simplex algorithm - Using the Corner Point concept as the foundation for an efficient solution method.

We want to convert this general formulation to a system of linear equations - we know how to solve these!

$$\min_{x} z = c^T x$$

$$s.t.$$

$$A_h x = b_h$$

$$A_1 x \geq b_1$$

$$A_2 x \leq b_2$$

$$x \geq 0$$

PROGRAMACIÓN LINEAL

Standard formulation of LPs

$$\min_{x} z = c^T x$$

$$s.t.$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

How can we formulate the problem...

$$\min_x z = c^T x$$
$$s.t.$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

•If we want to maximize a function?

Use the negative of the same function. *Max f = Min -f*

•If we have unconstrained variables, i.e., x may be negative?

x may be written as the difference of two non-negative variables, $x=x_1-x_2$

•If we have inequalities (besides the equalities)?

We can add non-negative additional (slack) variables and convert the inequality into a equality.

Simplex algorithm

PROGRAMACIÓN LINEAL

We will add "slack" variables to all inequalities to convert them to equalities.

Original expression

$$5\mathbf{x}_1 + 7\mathbf{x}_2 - 2.3\mathbf{x}_3 \leq 37$$

$$5\mathbf{x}_1 + 7\mathbf{x}_2 - 2.3\mathbf{x}_3 \geq 37$$

$$5\mathbf{x}_1 + 7\mathbf{x}_2 - 2.3\mathbf{x}_3 = 37$$

PROGRAMACIÓN LINEAL

The Simplex algorithm - Using the Corner Point concept as the foundation for a solution method.

We have the LP problem in "Standard Form". Note that the system has more variables than equations.

$$\min_x z = c^T x$$

$$s.t.$$

$$A\,x = b$$

$$x \geq 0 \quad [\text{note that ultimately, } x_{min} \geq x \geq x_{max}\,]$$

The vector x of variables now includes the slack variables.

Some definitions...

•**Feasible solution.** A solution that satisfies the constraints

•**Basic solution.** A solution in which n-m variables are set equal to zero, and the remaining systems of equations is solved.

•**Basis.** The collection of variables not set equal to zero to obtain the basic solution

•**Basic feasible solution**. This is a basic solution that satisfies the non-negativity conditions.

•**Nondegenerate basic feasible solution.** This is a basic feasible solution that has got exactly m positive x_i.

•**Optimal solution.** A feasible solution that optimizes the Función objetivo.

•**Optimal basic solution.** This is a basic feasible solution for which the Función objetivo is optimal.

Simplex algorithm

PROGRAMACIÓN LINEAL

The Simplex Algorithm: Finding a solution for "non-square set of equations

Basic | Non-basic

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & & a_{mm} & a_{m,m+1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Original, non-square equation set of constraints in standard form

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \cdots & & \\ a_{m1} & & a_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Square set of equations that can be solved for the basic variables

$$\begin{bmatrix} x_{m+1} \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

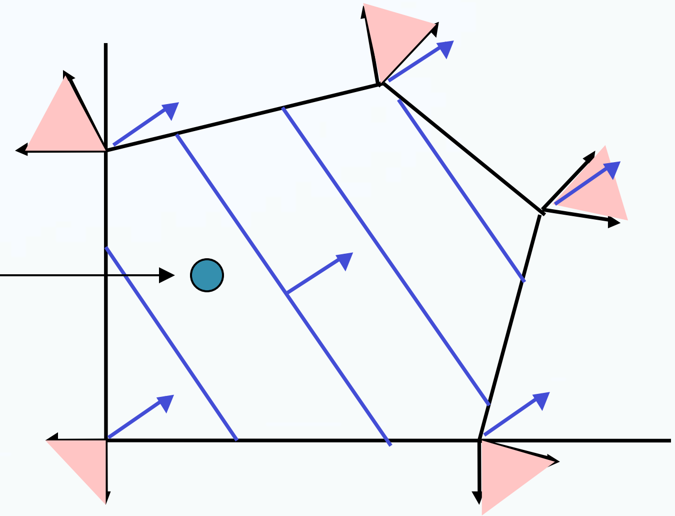
Non-basic variables which take the values that optimize the objective. The values will be at an extreme of allowed range.

Simplex algorithm

PROGRAMACIÓN LINEAL

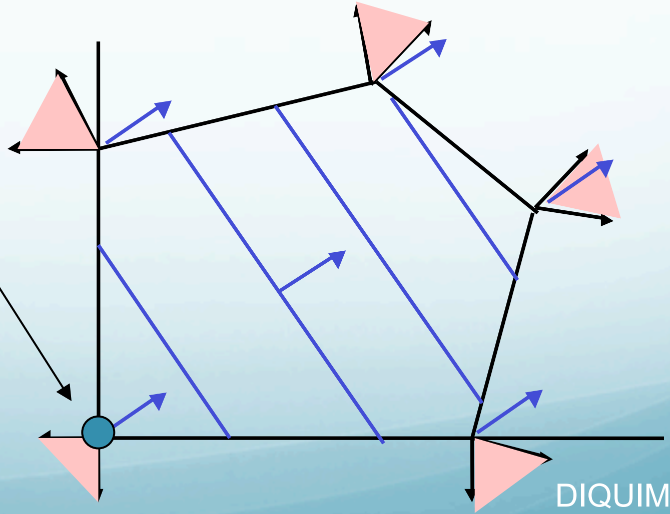
FEASIBLE SOLUTION

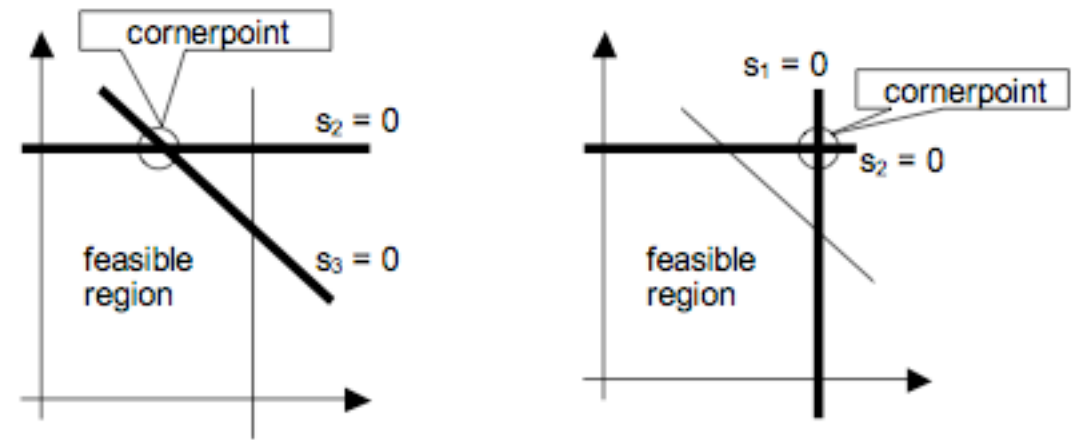
Any selection of values for the non-basic variables that result in all variables being non-negative yields a feasible solution.



BASIC FEASIBLE SOLUTION

A selection of 0.0 values for the non-basic variables result in basic variables being non-negative and yields a corner point.





(a) feasible cornerpoint (b) infeasible cornerpoint

Simplex algorithm

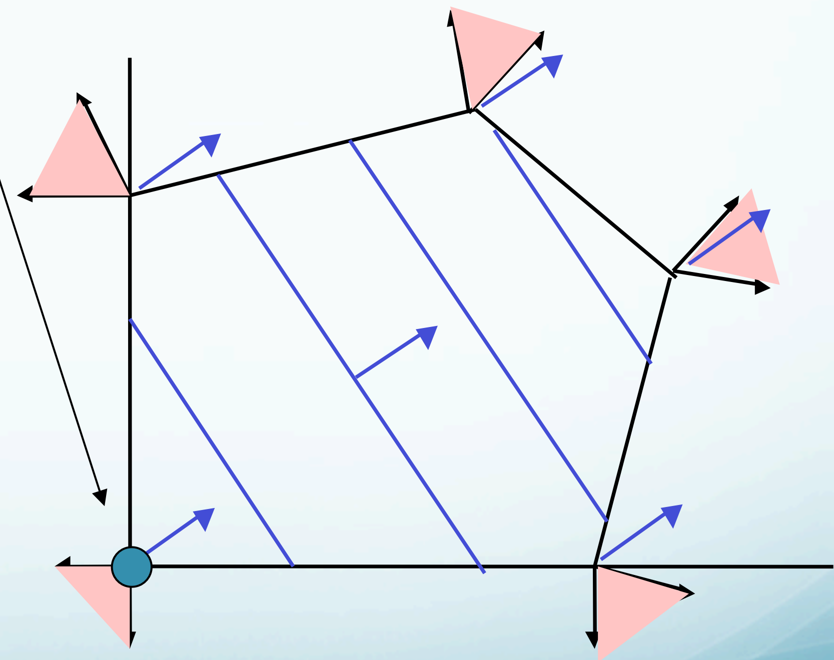
PROGRAMACIÓN LINEAL

The Simplex Algorithm

Using the Corner Point concept as the foundation for a solution using the Simplex Algorithm.

Start here

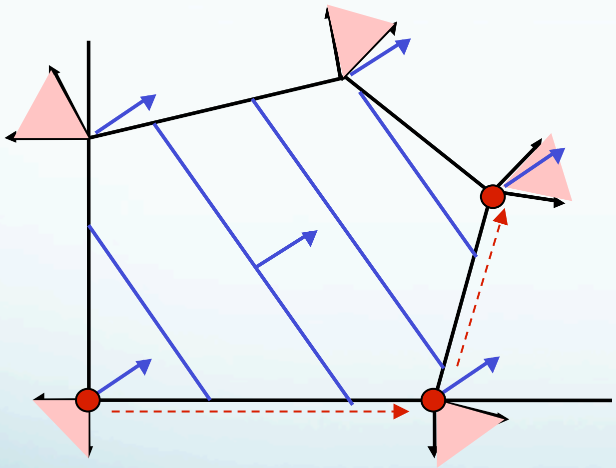
1. **Are we optimal;**
2. **Move along an edge to an adjacent corner point.**
3. **This adds one variable to the basis and removes another variable from the basis.**



Simplex algorithm

PROGRAMACIÓN LINEAL

Moving between adjacent corner points is achieved by changing one variable from basic to non-basic and one non-basic to basic. (The new variables must form a basis.)



The Simplex Algorithm

- **Consider only adjacent corner points for improvement direction.**
- **Move along the edge that yields the greatest rate of improvement**
- **Move until another corner point has been reached**
- **If further improvement is possible, iterate.**

Algoritmo Simplex: Procedimiento.

$$\begin{array}{ll} \text{Mín:} & f(\underline{x}) = -x_1 + x_2 \\ \text{Sujeto a:} & 2x_1 - x_2 \geq -2 \\ & -x_1 + 3x_2 \geq -2 \\ & -x_1 - x_2 \geq -4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Etapa 0. Transformar las restricciones de desigualdad para que todos los bj sean positivos.

$$\begin{array}{lll} \text{Mín:} & f(\underline{x}) = -x_1 + x_2 & \\ \text{Sujeto a:} & -2x_1 + x_2 \leq 2 & (A) \\ & x_1 - 3x_2 \leq 2 & (B) \\ & x_1 + x_2 \leq 4 & (C) \\ & x_1, x_2 \geq 0 & \end{array}$$

Problema original

Etapa Introducir las variables de holgura (slack variables).

$$\begin{array}{lll} \text{Mín:} & f(\underline{x}) = -x_1 + x_2 & \\ \text{Sujeto a:} & -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 & (A) \\ & x_1 - 3x_2 + x_4 = 2 & (B) \\ & x_1 + x_2 + x_5 = 4 & (C) \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 & \end{array}$$

Problema aumentado

¿Grados de libertad?

Etapa 2. Encontrar una solución que esté en un vértice de la región factible.

2 grados de libertad. 2 variables independientes. *2 variables NO BÁSICAS*

3 variables dependientes. *3 variables BÁSICAS*

$x_1=0$

$x_2=0$

$$\begin{aligned} f(\underline{x}) &= 0 \\ x_3 &= 2 \quad (A) \\ x_4 &= 2 \quad (B) \\ x_5 &= 4 \quad (C) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lrl} \text{Mín:} & f(\underline{x}) = -x_1 + x_2 & \\ \text{Sujeto a:} & -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 & (A) \\ & x_1 - 3x_2 + x_4 = 2 & (B) \\ & x_1 + x_2 + x_5 = 4 & (C) \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 & \end{array}$$

Etapa 3. Buscar una nueva solución factible que vaya disminuyendo el objetivo.

$$f(\underline{x}) - \sum_i c_i x_i = 0$$

Eliminar como variable no básica la de mayor valor -ci

$$\text{mín}\left(\frac{b_j}{a_{j1}}\right) \geq 0$$

Escoger como nueva no básica la de menor valor positivo

$$\begin{aligned} (A) &: 2/-2 = -1 \\ (B) &: 2/1 \quad = 2 \\ (C) &: 4/1 \quad = 4 \end{aligned}$$

(B) x_4 en este caso

Eliminar como variable no básica la de mayor valor -ci

Es la variable que más influye en la función objetivo.
Al pasar a ser básica (distinta de cero) es la que hace disminuir más la función objetivo.

Escoger como nueva no básica la de menor valor positivo

Es la variable que llega antes a una restricción.

$$
\begin{aligned}
& f(\underline{x}) = 0 \\
& x_3 = 2 \quad (A) \\
& x_4 = 2 \quad (B) \\
& x_5 = 4 \quad (C)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{lrl}
\text{Mín:} & f(\underline{x}) = -x_1 + x_2 & \\
\text{Sujeto a:} & -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 & (A) \\
& x_1 - 3x_2 + x_4 = 2 & (B) \\
& x_1 + x_2 + x_5 = 4 & (C) \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 &
\end{array}
$$

$x_1=0$

$x_2=0$

Si escojo x_4 (menor valor) como nueva no básica ($x_4=0$) (B) $x_1=2$ $\Rightarrow$ $x_5=4-x_1=4-2=2$ $x_5>0$ OK

Si escojo x_5 (mayor valor) como nueva no básica ($x_5=0$) (C) $x_1=4$ $\Rightarrow$ $x_4=2-x_1=2-4=-2$ x_4 NEGATIVA!!

Etapa 4. Transformar las ecuaciones de acuerdo a la nueva distribución de variables.

Variables básicas: x_1, x_3, x_5
Variables no básicas: x_2, x_4

Restricción más desfavorable

$$(B): x_1 = 2 + 3x_2 - x_4$$

$$\begin{aligned}
&(A): && -2(2+3x_2-x_4)+x_2+x_3=2 \Rightarrow x_3-5x_2+2x_4=6\\
&(B): && x_1-3x_2+x_4=2\\
&(C): && (2+3x_2-x_4)+x_2+x_5=4 \Rightarrow x_5+4x_2-x_4=2\\
& && f+(2+3x_2-x_4)-x_2=0 \Rightarrow f+2x_2-x_4=-2
\end{aligned}$$

Se continua el procedimiento hasta….?

Todos los coeficientes de la función objetivo son negativos.

Procedimiento en forma de tabla

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	f	b
x_3	-2	1	1	0	0	0	2
x_4	[1]	-3	0	1	0	0	2
x_5	1	1	0	0	1	0	4
	1	-1	0	0	0	1	$\boxed{0}$

← fila pivote

columna pivote

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	f	b
x_3	0	-5	1	2	0	0	6
x_1	1	-3	0	1	0	0	2
x_5	0	4	0	-1	1	0	2
	0	2	0	-1	0	1	$\boxed{-2}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	f	b
x_3	0	0	1	0.75	1.25	0	8.5
x_1	1	0	0	0.25	0.75	0	3.5
x_2	0	1	0	-0.25	0.25	0	0.5
	0	0	0	-0.5	-0.5	1	$\boxed{-3}$

$$\boxed{\begin{aligned} x_3 &= 8.5 \\ x_1 &= 3.5 \\ x_2 &= 0.5 \end{aligned}}$$

Forma canónica

$$
\begin{array}{ll}
\text{Mín:} & f(\underline{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
\text{Sujeto a:} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
& \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\
& x_i \geq 0 \; ; \; b_j \geq 0 \quad (i = 1, n \; ; \; j = 1, m)
\end{array}
$$

Cuando la solución básica factible inicial no es trivial:

Método de las dos fases

Método de la gran M

Método de las dos fases

$$\begin{array}{ll} \text{Mín:} & f = x_1 + 2x_2 \\ \text{Sujeto a:} & 3x_1 + 4x_2 \geq 5 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{Mín:} & f = x_1 + 2x_2 & \\ \text{Sujeto a:} & 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 5 & (A) \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 4 & (B) \\ & x_i \geq 0 & \end{array}$$

$$w + \left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}\right)x_1 + \left(\sum_{i=1}^{m} a_{i2}\right)x_2 + \ldots + \left(\sum_{i=1}^{m} a_{in}\right)x_n = \sum_{i=1}^{m} b_i$$

$$\begin{array}{lllll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + .. + a_{1n}x_n & +x_{n+1} & & & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + .. + a_{2n}x_n & & +x_{n+2} & & = b_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + .. + a_{mn}x_n & & & +x_{n+m} & = b_m \end{array}$$

Fase I

Mín: $f = x_1 + 2x_2$

Sujeto a: $3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_5 = 5 \quad (A)$

$x_1 + x_2 + x_4 + x_6 = 4 \quad (B)$

$x_i \geq 0$

$w + 4x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 = 9$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	w	b	
3	4	-1	0	1	0	0	5	←
1	1	0	1	0	1	0	4	
4	5	-1	1	0	0	1	9	

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	w	b	
0.75	1	-0.25	0	0.25	0	0	1.25	
0.25	0	0.25	1	-0.25	1	0	2.75	←
0.25	0	0.25	1	-1.25	0	1	2.75	

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	w	b
1	1	0	1	0	1	0	4
1	0	1	4	-1	4	0	11
0	0	0	0	-1	-1	1	$\boxed{0}$

Fase II

Mín: $f = x_1 + 2x_2$

Sujeto a: $3x_1 + 4x_2 - x_3 = 5 \quad (A)$

$x_1 + x_2 + x_4 = 4 \quad (B)$

$x_i \geq 0$

$x_2 = 4 \; ; \; x_3 = 11.$

$$f = x_1 + 2(4 - x_1 - x_4) \Rightarrow f + x_1 + 2x_4 = 8$$

x_1	x_2	x_3	x_4	f	b	
1	1	0	1	0	4	
1	0	1	4	0	11	←
1	0	0	2	1	8	
			↑			

x_1	x_2	x_3	x_4	f	b	
0.75	1	-0.25	0	0	1.25	←
0.25	0	0.25	1	0	2.75	
1	0	-0.5	0	1	2.50	
↑						

	x_1	x_2	x_3	x_4	f	b
x_1	1	1.33	-0.33	0	0	1.67
x_4	0	-0.33	0.33	1	0	2.33
	0	-0.67	-0.33	0	1	$\boxed{1.67}$

$$x_1 = 1.67 \ ; \ x_2 = 0 \ ; \ x_3 = 0 \ ; \ x_4 = 2.33 \ ; \ f = 1.67$$

Resolver mediante el método de las dos fases

Maximize $z = x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 - x_5 + 2x_6$

subject to

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \quad\quad &= 12 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 &= 18 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \quad\quad &= 24 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 6. \end{aligned}$$

FASE 1

Se añaden 3 variables artificiales

$$\text{Minimize} \quad z' = y_1 + y_2 + y_3$$

subject to

$$\left.\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + y_1 &= 12\\
x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 + y_2 &= 18\\
3x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 + y_3 &= 24
\end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 6; \qquad y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3$$

$$z' + y_1 + y_2 + y_3 = 0.$$

$$z' + 5x_1 + 10x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 6x_5 + x_6 = 54$$

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$$

$$y_1 = 12, \quad y_2 = 18, \quad y_3 = 24$$

Tabla inicial

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	y_3	
y_1	1	2	2	1	1	0	1	0	0	12
y_2	1	2	1	1	2	1	0	1	0	18
y_3	3	6	2	1	3	0	0	0	1	24
	+5	+10	+5	+3	+6	+1	0	0	0	+54

En este caso escoger la columna del más positivo coeficiente de la función objetivo

$$\min\{\tfrac{12}{2}, \tfrac{18}{2}, \tfrac{24}{6}\} = \tfrac{24}{6} = 4,$$

Minimize $z' = y_1 + y_2 + y_3$

subject to

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + y_1 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 + y_2 = 18 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 + y_3 = 24 \end{array}\right\}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 6; \qquad y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	y_3	
y_1	0	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	4
y_2	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	1	0	1	$-\frac{1}{3}$	10
x_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{6}$	4
	0	0	$+\frac{5}{3}$	$+\frac{4}{3}$	$+1$	$+1$	0	0	$\frac{5}{3}$	$+14$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	y_3	
x_3	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	3
y_2	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	1	$-\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	9
x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	3
	0	0	0	$+\frac{1}{2}$	$+1$	$+1$	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	$+9$

Iteraciones hasta que la función objetivo sea cero

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	y_3	
x_3	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	3
x_6	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	1	$-\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	9
x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	3
	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0

$x_3=3-1/2x_4$
$x_6=9-1/x_4-x_5$
$x_2=3-1/2x_1-1/2x_5$

$$x_2 = 3, \quad x_3 = 3, \quad x_6 = 9$$
$$x_1 = x_4 = x_5 = y_1 = y_2 = y_3 = 0$$

FASE 2

Reescribir función objetivo Maximize $z = x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 - x_5 + 2x_6$

$$\text{Max } z = \text{Min } -z = -x_1+2x_2+3x_3+x_4+x_5-2x_6$$

$$(z' = -z)\ \text{Min } z' + x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 - x_5 + 2x_6 = 0$$

variables básicas -- $x_2\ x_3\ x_6$ --

Tabla resultado de fase I

Función objetivo original

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	3
x_6	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	1	9
x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	3
	1	-2	-3	-1	-1	+2	0

$$f'_4 = f_4 + 2f_3 + 3f_1 - 2f_2$$

2	0	0	-1/2	-2	0	-3

Función objetivo sólo con variables no básicas (no juegan)

Poner en forma canónica *las variables básicas*

$$\text{Maximize} \quad z = x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 - x_5 + 2x_6$$

x_3=3-1/2x_4
x_6=9-1/x_4-x_5
x_2=3-1/2x_1-1/2x_5

Resultado de fase I
(variables básicas -- x_2 x_3 x_6 -- NO pueden aparecer en la función objetivo)

Max z=x_1-2(3-1/2x_1-1/2x_5)-3(3-1/2x_4)-x_4-x_5+2(9-1/x_4-x_5)

Max z=2x_1-1/2x_4-2x_5+3

Min –z + 2x_1 - 1/2x_4 - 2x_5 = -3

Función objetivo sólo con variables no básicas (no juegan)

Min $-z + 2x_1 - 1/2x_4 - 2x_5 = -3$

	x_1 ↓	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	3
x_6	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	1	9
← x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	3
	+2	0	0	$-\frac{1}{2}$	−2	0	−3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	3
x_6	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	1	9
x_1	1	2	0	0	1	0	6
	0	−4	0	$-\frac{1}{2}$	−4	0	−15

Todos negativos, fin del simplex

Maximize $z = x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 - x_5 + 2x_6$

subject to

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \quad &= 12 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 &= 18 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \quad &= 24 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 6. \end{aligned}$$

$z' = -z = -15 \rightarrow$ **$z = 15$**

$x_1=6$, $x_3=3$, $x_6=9$

$x_2=x_4=x_5=0$

Maximizar $8x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4$

Sujeto a las siguientes restricciones

$$3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 \geq 2$$
$$2x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 10$$
$$8x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 40$$
$$-x_1 + 3x_3 + 3x_4 \geq -10$$

SOLUCIÓN

z = 52

x_2=2, x_3=16 x_5=22, x_8=58

x_1=x_4=x_6=x_7=0

Método de las gran M

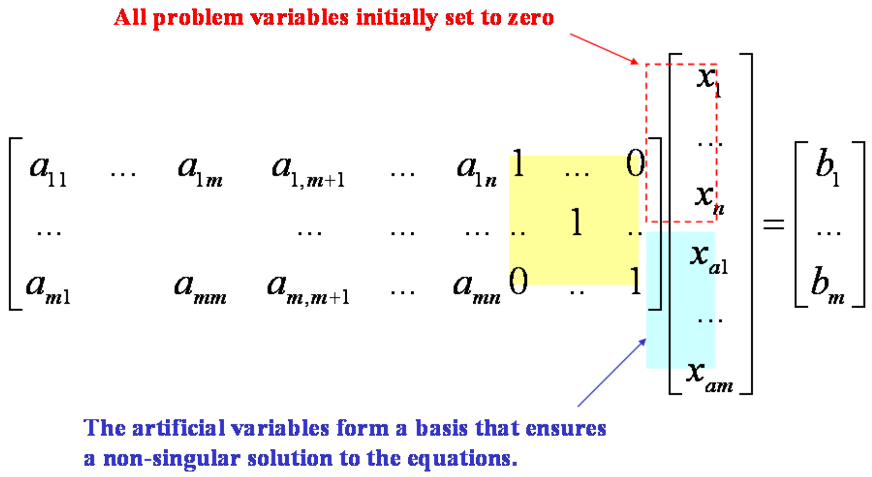
Éste método añade variables artificiales, que no deben de aparecer en la solución óptima final

$P_o = c_1x_1 + \ldots. + c_nx_n$ Objetivo original
$P_a = c_1x_1 + \ldots. + c_nx_n + Mx_{a1} + \ldots.+Mx_{am}$ Objetivo modificado

Las variables artificiales dan una solución inicial en forma canónica.

$$\begin{array}{lllll}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 +..+ a_{1n}x_n & +x_{n+1} & & & = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 +..+ a_{2n}x_n & & +x_{n+2} & & = b_2 \\
\vdots & & \ddots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 +..+ a_{mn}x_n & & & +x_{n+m} & = b_m
\end{array}$$

Todas las variables "reales" valen inicialmente 0 y las variables artificiales son las que satisfacen las ecuaciones. Éstas variables tienen de coeficiente 1.



En el óptimo todas las variables artificiales deben de valer 0.

Se consigue poniendo una alta penalización a las mismas en la función objetivo, la "gran M".

La resolución es en forma de tabla como en los casos anteriores

Coeficientes función objetivo

$$
\begin{bmatrix}
-1 & c_1 & c_2 & \dots & 0 & 0 & M & \dots & M \\
0 & a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 & .. \\
0 & a_{m1} & a_{mm} & a_{m,m+1} & \dots & a_{mn} & 0 & .. & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
x_1 \\ \dots \\ x_n \\ \dots \\ x_{am}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
z \\ b
\end{bmatrix}
$$

Coeficientes de restricciones LHS

Variables artificiales

Coeficientes de restricciones RHS

Ejemplo de resolución empleando el método de la gran M

$$
\begin{aligned}
&\min \quad z = 2x_1 + 3x_2 \\
&s.t. \\
&0.5x_1 + 0.25x_2 \le 4 \\
&\quad x_1 + \qquad 3x_2 \ge 20 \\
&\quad x_1 + \qquad x_2 = 10 \\
&x_i \ge 0 \;\; \text{for} \;\; \text{i} = 1,2
\end{aligned}
$$

Convertir el problema a estándar añadiendo variables de holgura

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\
s.t. \quad & \\
& 0.5x_1 + 0.25x_2 \le 4 \\
& x_1 + 3x_2 \ge 20 \\
& x_1 + x_2 = 10 \\
& x_i \ge 0 \ \text{ for } \ \mathrm{i} = 1,2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\
s.t. \quad & \\
& 0.5x_1 + 0.25x_2 + s_1 = 4 \\
& x_1 + 3x_2 - s_2 = 20 \\
& x_1 + x_2 = 10 \\
& x_i \ge 0 \ \text{ for } \ \mathrm{i} = 1,2
\end{aligned}
$$

Añadir variables artificiales para encontrar una solución inicial factible.

$$\begin{aligned}
&\min \quad z = 2x_1 + 3x_2 \\
&s.t. \\
&0.5x_1 + 0.25x_2 + s_1 = 4 \\
&\quad x_1 + \quad 3x_2 - s_2 = 20 \\
&\quad x_1 + \quad x_2 \quad = 10 \\
&x_i \geq 0 \quad \text{for} \quad \mathrm{i} = 1,2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\min \quad z = 2x_1 + 3x_2 \\
&s.t. \\
&0.5x_1 + 0.25x_2 + s_1 \qquad\qquad\qquad = 4 \\
&\quad x_1 + \quad 3x_2 \qquad - s_2 + a_2 \qquad = 20 \\
&\quad x_1 + \quad x_2 \qquad\qquad\qquad + a_3 = 10 \\
&x_i \geq 0 \quad \text{for} \quad \mathrm{i} = 1,2
\end{aligned}$$

Añadir altas penalizaciones a las variables en la función objetivo.

$$
\begin{aligned}
&\min \quad z = 2x_1 + 3x_2 + Ma_2 + Ma_3 \\
&s.t. \\
&0.5x_1 + 0.25x_2 + s_1 = 4 \\
&x_1 + 3x_2 - s_2 + a_2 = 20 \\
&x_1 + x_2 + a_3 = 10 \\
&x_i \geq 0 \;\; \text{for} \;\; \mathrm{i} = 1,2
\end{aligned}
$$

Formular el problema en forma de tabla

¡¡¡NOTA!!! En este caso la función objetivo se ha despejado al revés a lo visto en el método anterior poníamos ($z-2x_1-3x_2-Ma_2-Ma_3$), por eso se escogerá el menor valor negativo en lugar del mayor positivo. ¡Y se acabará cuando todos sean positivos!

$$-z + 2x_1 + 3x_2 + Ma_2 + Ma_3 = 0$$

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 2x_1 + 3x_2 + Ma_2 + Ma_3 \\ s.t. \quad & \\ & 0.5x_1 + 0.25x_2 + s_1 = 4 \\ & x_1 + 3x_2 - s_2 + a_2 = 20 \\ & x_1 + x_2 + a_3 = 10 \\ & x_i \geq 0 \text{ for } i = 1,2 \end{aligned}$$

z	x_1	x_2	s_1	s_2	a_2	a_3	rhs	Basic variable	Ratio
-1	2	3	0	0	M	M	0	z	
0	.5	.25	**1**	0	0	0	4	s_1	---
0	1	3	0	-1	**1**	0	20	a_2	---
0	1	1	0	0	0	**1**	10	a_3	---

Canonical form: Buscamos que todas las variables básicas tengan una columna con un 1 y el resto de elementos 0.

Luego operamos para tener esta condición en las variables a_2 y a_3

Ahora el problema está en una solución factible (vértice) y en forma canónica.

Empezamos el procedimiento cambiando una variable de la base (cambiar a un vértice adyacente) para:

1. Mejorar la función objetivo
2. Mantener la solución factible.

Initial tableau

This (x_2) is the variable entering the basis (smallest value < 0).

z	x_1	x_2	s_1	s_2	a_2	a_3	rhs	Basic variable	Ratio
-1	-2M+2	-4M+3	0	M	0	0	-30M	z	
0	.5	.25	**1**	0	0	0	4	s_1	16
0	1	3	0	-1	**1**	0	20	a_2	20/3
0	1	1	0	0	0	**1**	10	a_3	10

Pivot element, a_{rs}

This (a_2) is the variable leaving the basis. (Smallest value of b_i/a_{ij} for entering $a_{ij} > 0$)

Si la solución no es óptima seguimos con el procedimiento.

tableau

This (x_1) is the variable entering the basis (smallest < 0).

z	x_1	x_2	s_1	s_2	a_2	a_3	rhs	Basic variable	Ratio
-1	-2M/3+1	0	0	-M/3+1	+4M/3-1	0	-10M/3-20	z	
0	5/12	0	1	1/12	-1/12	0	7/3	s_1	28/5
0	1/3	1	0	-1/3	1/3	0	20/3	x_2	20
0	2/3	0	0	1/3	-1/3	1	10/3	a_3	5

Pivot element, a_{rs}

This (a_3) is the variable leaving the basis.
(Smallest value of b_i/a_{ij} for entering a_{ij} >0)

Third tableau

All reduced costs are greater than 0.0. The objective cannot be decreased by changing the basis, i.e., moving to an adjacent corner point. We have found the *optimum*!

z	x_1	x_2	s_1	s_2	a_2	a_3	rhs	Basic variable	Ratio
-1	0	0	0	1/2	-1/2+M	-3/2+M	-25	$z = 25$	
0	0	0	1	-1/8	1/8	-5/8	1/4	$s_1 = 1/4$	---
0	0	1	0	-1/2	1/2	-1/2	5	$x_2 = 5$	---
0	1	0	0	1/2	-1/2	3/2	5	$x_1 = 5$	---

10. In this problem, the optimum was reached after the artificial variables were eliminated. Typically, (many) additional corner points would have to be evaluated using the pivoting procedure.

The solution is $x_1 = 5$, $x_2 = 5$; slack variables values are $s_1 = ¼$ and $s_2 = 0$. The objective function value is $z = 25$.

PROGRAMACIÓN LINEAL

Problema

$$\min \quad z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t.$$

$$0.5x_1 + 0.25x_2 \leq 4$$

$$x_1 + \quad 3x_2 \geq 20$$

$$x_1 + \quad x_2 = 10$$

$$x_i \geq 0 \quad \text{for} \quad i = 1,2$$

Solución

$z = 25$ — Función objetivo

$3.75 \leq 4.0$ — inactive

$20 \geq 20$ — active

$10 = 10$ — active

$x_1 = 5 \geq 0$ — inactive

$x_2 = 5 \geq 0$ — inactive

variables

¿Puedo saber algo más con la solución?

Análisis de sensibilidad

Cómo afecta el cambio de parámetros en la solución.

Problema

$$\min \quad z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t.$$

$$0.5x_1 + 0.25x_2 \leq 4$$

$$x_1 + \qquad 3x_2 \geq 20$$

$$x_1 + \qquad x_2 = 10$$

$$x_i \geq 0 \quad \text{for} \quad i = 1,2$$

Cómo afecta un cambio en este parámetro en z y en los valores de x*?

¡Sin tener que resolver de nuevo el problema!

Los coeficientes de la función objetivo de las variables originales se denominan: costes reducidos

Los coeficientes de la función objetivo de las demás variables (holgura) se denominan: precios sombra o duales

En el **óptimo**:
O la variable es cero (no básica) o el precio dual o el coste reducido es cero.
En el caso de que ambos sean cero:

Existe solución degenerada si la variable es básica
Existen múltiples óptimos si la variable es no básica

Análisis de sensibilidad

- **Sensibilidad: Ver la influencia en la función objetivo bien de los valores de la parte derecha de las restricciones (RHS) o bien de los valores de los coeficientes de la función objetivo.**

1. **Los resultados se limitan a los óptimos con las mismas restricciones activas que el caso base, es decir, no requiere cambiar la base escogida.**
2. **Los resultados definen el rango de cambio de parámetros (coeficientes función objetivo o constantes de RHS) que implican que no hay cambio en las restricciones activas.**
3. **El resultado proporciona un valor exacto, cuantitativo de cómo afecta un incremento del parámetro al valor obtenido de la función objetivo.**

$$\Delta OBJ^*/\Delta parametro$$

Análisis de sensibilidad

Cambios en el parámetro RHS

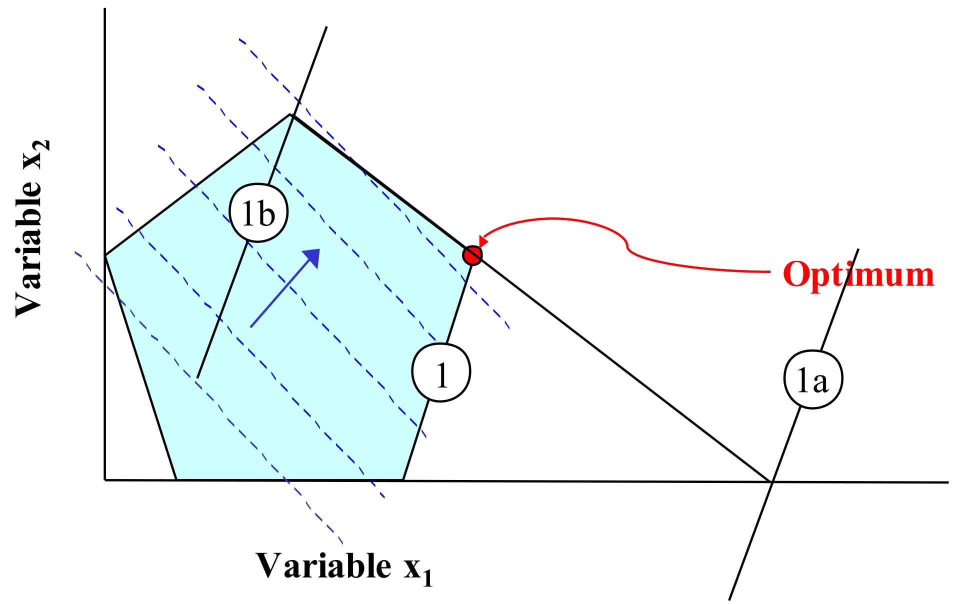
El software presenta informes con el valor y rango de la sensibilidad de cada restricción. Fuera de ese rango la base cambia.

Constraint ID	Status (Binding/ non-binding) (Active/inactive)	slack	Shadow price (sensitivity of rhs)	Maximum allowable increase (AI)	Maximum allowable decrease (AD)
Max. Reflux flow	Active	0	3.74	47	123
Max. Pump 7	Inactive	321	0	1.0E30	321

Shadow price = ΔOBJ*/ΔRHS, has units!

Análisis de sensibilidad

Cambios en el parámetro RHS



Cuánto puedo cambiar la restricción 1 sin cambiar de base?

Los valores de x* cambian! (obsérvese que hasta que la restricción no corta al eje no hay cambio de restricciones activas y por tanto de base).

Los valores de las variables (si la restricción está activa) y de la función objetivo variarán, pero la base permanece.

El nuevo valor de la función objetivo será:

$$Znew = Zoriginal - \text{precio sombra} \times \Delta b$$

El software (excel) presenta informes con el valor y rango de la sensibilidad de cada restricción. Fuera de ese rango la base cambia.

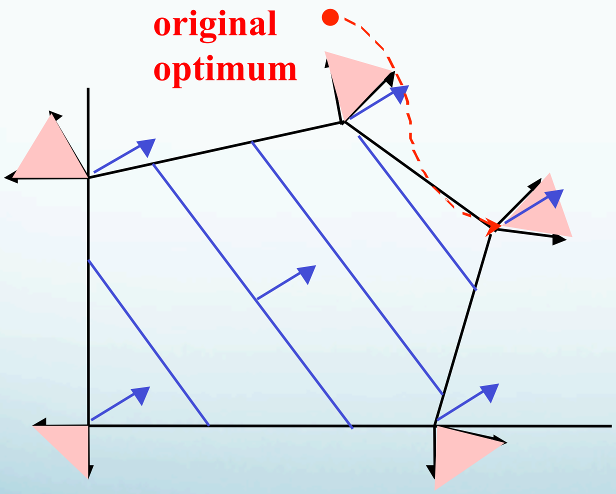
Constraint ID	Status (Binding/ non-binding) (Active/inactive)	slack	Shadow price (sensitivity of rhs)	Maximum allowable increase (AI)	Maximum allowable decrease (AD)
Max. Reflux flow	Active	0	3.74	47	123
Max. Pump 7	Inactive	321	0	1.0E30	321

La variable vale 0 y su precio sombra distinto de cero, aquí 3,74.
Un incremento de la restricción activa de 10unidades implicaría un incremento en la función objetivo de 3,74*10=37,4 unidades.
Siempre que no aumente el valor de la restricción más de 47unidades o lo baje en más de 123 unidades las variables básicas (distintas de cero) seguirán siendo las mismas.

Análisis de sensibilidad

Función objetivo = z = $\Sigma c_j x_j$

Sensibilidad a un cambio en un coeficiente de la función objetivo.



Original problem

Cambios en c_j que no cambian la base,

$\Delta x = 0$

$$\Delta z = \Delta \Sigma c_j x_j = \Sigma \Delta c_j (x_j)$$

$$= \Delta c_k (x_k)$$

Donde k = el coeficiente cambiado

Los valores de *las variables en el nuevo óptimo no cambian*, al no variar las restricciones y no cambiar la base. Luego el óptimo es el mismo punto en el espacio.

El nuevo valor objetivo se calcula poniendo los valores de las variables en la nueva función objetivo, dado que cada vez se varía un coeficiente se puede calcular el cambio en la función objetivo debido a un cambio en el coeficiente. Hay dos casos:

Cambio los coeficientes (c) de las variables básicas de la función objetivo, en este caso la función objetivo variará según c(xnew-xold)
Nótese que en este caso el gradiente reducido es CERO

*Cambio en los coeficientes (c) de las variables no básicas de la función objetivo, en este caso la función objetivo NO variará, al ser las variables igual a cero.
Nótese que en este caso el gradiente reducido es DISTINTO de CERO

No olvidar que esto es válido siempre que variemos los valores de los coeficientes dentro del rango proporcionado por el informe de sensibilidad.

El Gradiente o coste reducido.

Este gradiente indica A PARTIR de qué valor del coeficiente de la función objetivo de la variable NO BÁSICA correspondiente, esta pasa a ser básica. *Nótese que el valor debe coincidir con uno de los límites de variación de los coeficientes, ya que estos indican cuando hay cambio de base en la solución.*

Si tenemos una variable que vale CERO (no básica) y su coste reducido es ,por ejemplo, 8. Observando el informe de sensibilidad se ve que coincide con el límite de decremento del coeficiente de la función objetivo, entonces tenemos que si variamos en algo más de 8 unidades, por ejemplo 10, este coeficiente (que supongamos que es 100) y EJECUTAMOS de nuevo la optimización tendremos como resultado un valor de la variable DISTINTO de CERO (supongamos 7) y a la función objetivo le habrá afectado en 7*(10-8)=14unidades (mejorándola).

Sólo le empieza a afectar una vez pasado el umbral de 8, de ahí que sea 10-8.

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor Igual	Gradiente reducido	Coeficiente objetivo	Aumento permisible	Aumento permisible
D19	A1C1	0,8	0	65	5	10
E19	A1C2	0	5	100	1,00E+30	5
F19	A1C3	0,3	0	115	15	115
G19	A2C1	0,1	0	55	10	5
H19	A2C2	0,7	0	85	5	95
I19	A2C3	0	15	120	1,00E+30	15

Restricciones

Celda	Nombre	Valor Igual	Sombra precio	Restricción lado derecho	Aumento permisible	Aumento permisible
D12	A1 C1	1,1	0	1.6	1,00E+30	0.5
D13	A2 C1	0,8	-10	0.8	0.8	0.1
D14	C1 C1	0,9	65	0.9	0.5	0.8
D15	C2 C1	0,7	95	0.7	0.1	0.7
D16	C3 C1	0,3	115	0.3	0.5	0.3

Si el coeficiente objetivo hago que valga 90 en lugar de 100 y como resultado obtengo que A1C2 vale 0,7 entonces la función objetivo habrá variado por esta razón en 0,7(10-5)=3,5unidades. (mejorando la función objetivo, es decir, si es minimizar lo bajaría)*

Análisis de sensibilidad

$$\min_{x} z = c^T x$$

$$s.t.$$

$$A\,x = b$$

$$\mathrm{x}_{\min} \geq \mathrm{x} \geq \mathrm{x}_{\max}$$

En general cambios en los coeficiente "A" del LHS, implican que el problema se debe resolver de nuevo.

Animación análisis sensibilidad

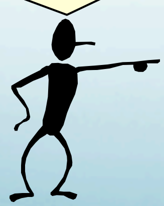
PROGRAMACIÓN LINEAL

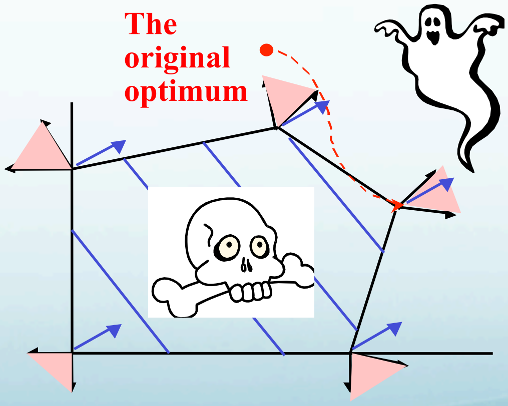
The LP Simplex Algorithm Weird Events

We must <u>monitor and diagnose</u> the LP solution. We could have made a formulation error, or we could have defined a problem that is correct but has special, unusual, properties.

We must monitor for weird effects.

Let' s learn to
- **diagnose and**
- **correct (if possible).**





Original problem

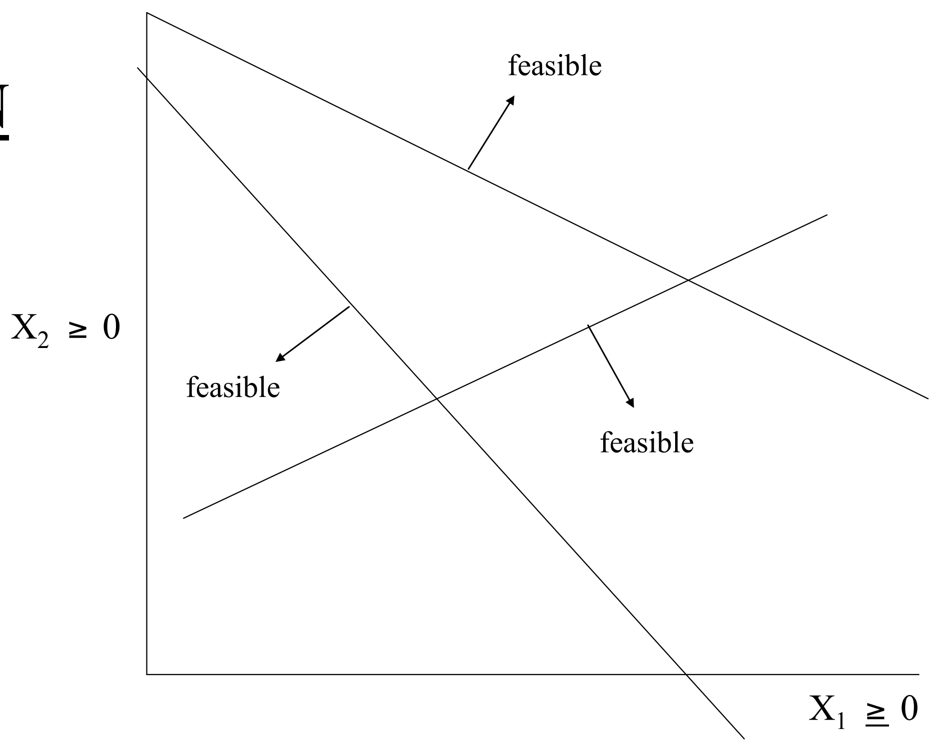
Solution Diagnosis

PROGRAMACIÓN LINEAL

The LP Simplex Algorithm Weird Events

NO FEASIBLE SOLUTION

- **Diagnosis -**
- **Remedial Action -**



Solution Diagnosis

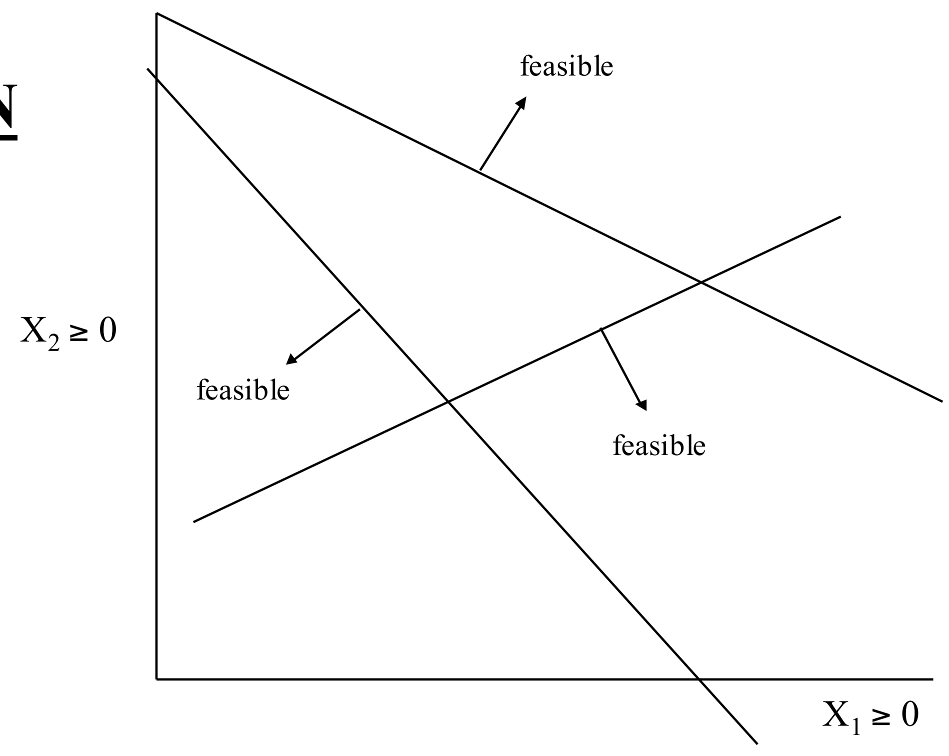
PROGRAMACIÓN LINEAL

The LP Simplex Algorithm Weird Events

NO FEASIBLE SOLUTION

- **Diagnosis -** At least one artificial variable in optimal basis - software reports this as infeasible.
- **Remedial Action -** reformulate, if appropriate

(See goal programming)



Solution Diagnosis

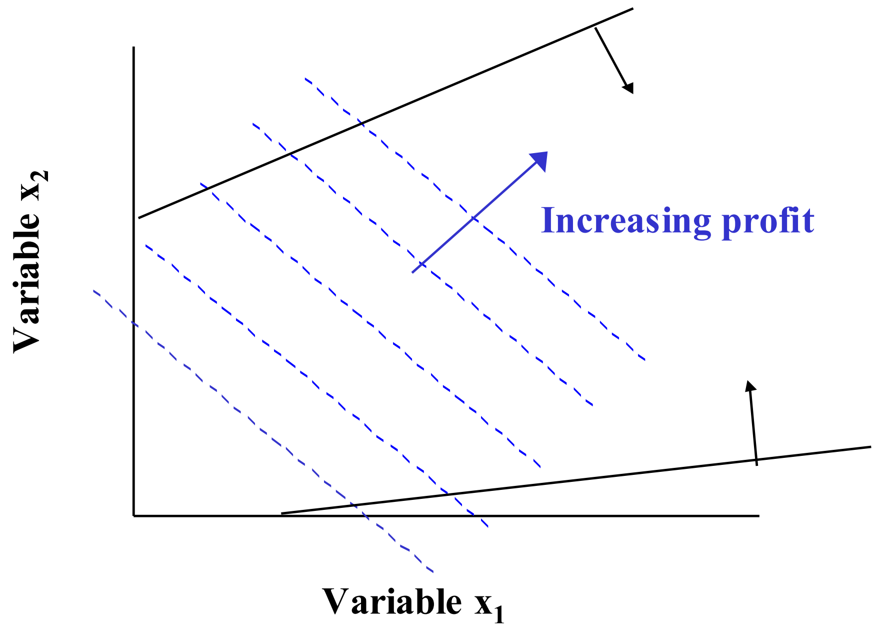
PROGRAMACIÓN LINEAL

The LP Simplex Algorithm Weird Events

<u>UNBOUNDED SOLUTION</u>

- **Diagnosis -**

- **Remedial Action -**



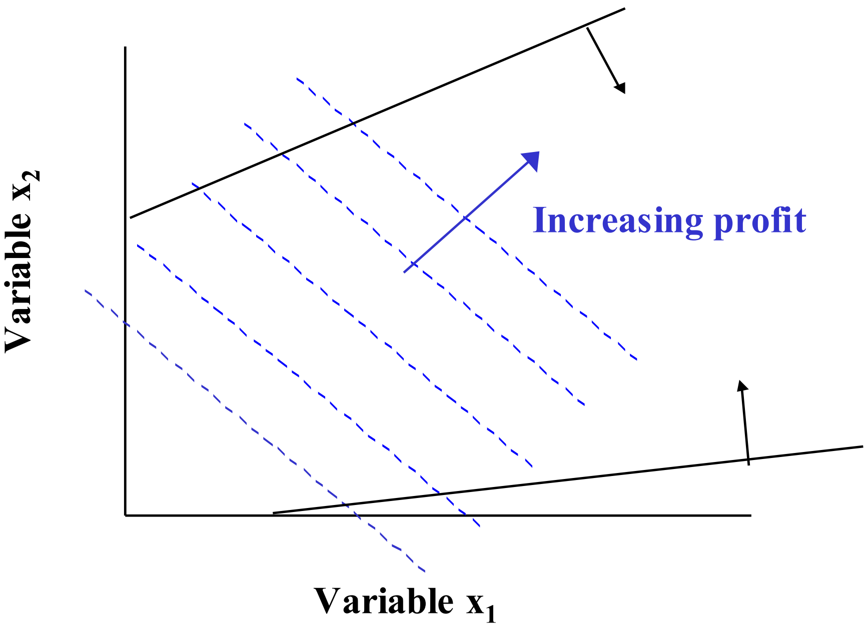
Solution Diagnosis

PROGRAMACIÓN LINEAL

The LP Simplex Algorithm Weird Events

UNBOUNDED SOLUTION

- **Diagnosis -** The distance to the best adjacent corner point is infinity - software will report.
- **Remedial Action -** Reformulate, which is always possible - realistic variables never go to ∞



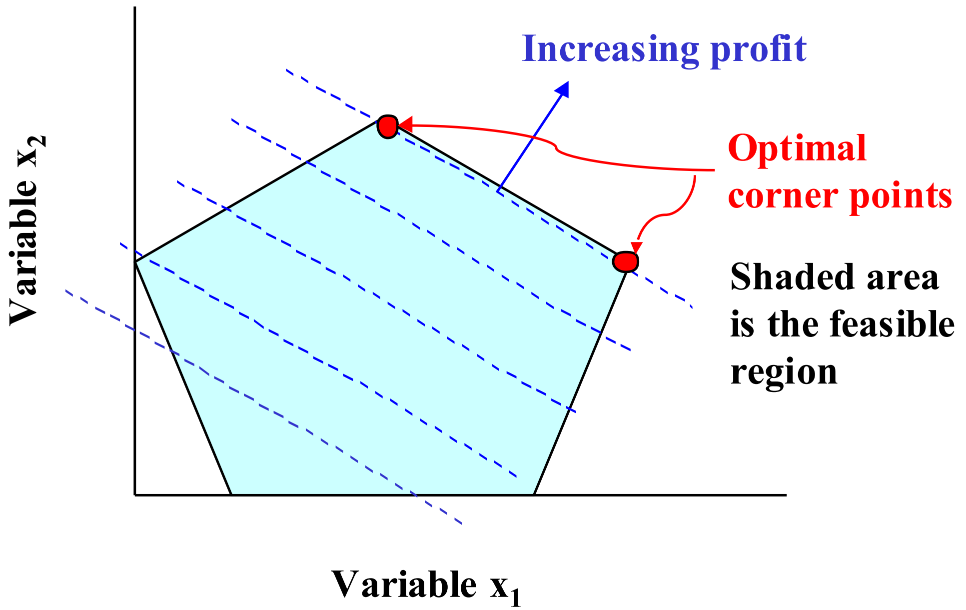
Solution Diagnosis

PROGRAMACIÓN LINEAL

The LP Simplex Algorithm Weird Events

ALTERNATIVE OPTIMA

- **Diagnosis -**
- **Remedial Action -**



Solution Diagnosis

PROGRAMACIÓN LINEAL

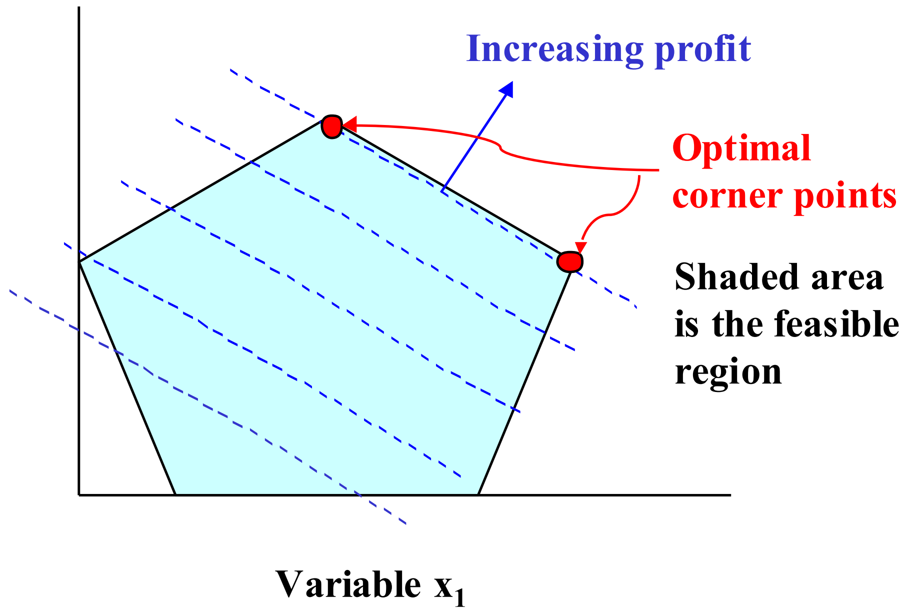
The LP Simplex Algorithm Weird Events

ALTERNATIVE OPTIMA

- **Diagnosis 1 - The basis can change with no change in objective.**

  One or more non-basic variables has a zero marginal cost.

  Software does not report warning



PROGRAMACIÓN LINEAL

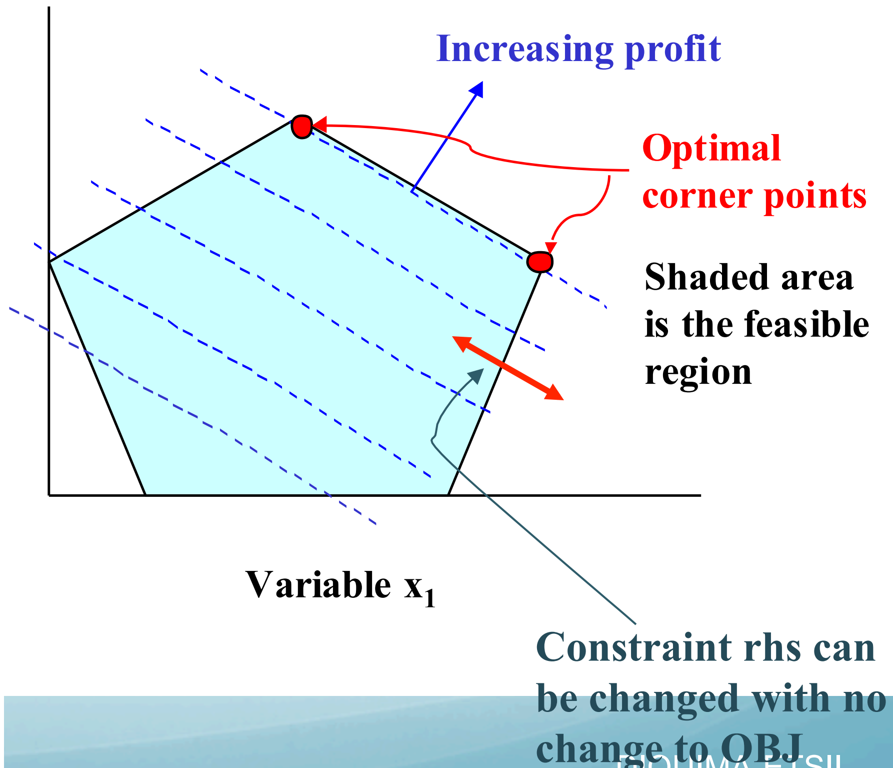
The LP Simplex Algorithm Weird Events

ALTERNATIVE OPTIMA

- **Diagnosis 2 -** One or more active constraint rhs can be changed without affecting the objective.

  An active constraint has a zero marginal value and non-zero range (both ways).

  Software does not report warning



Solution Diagnosis

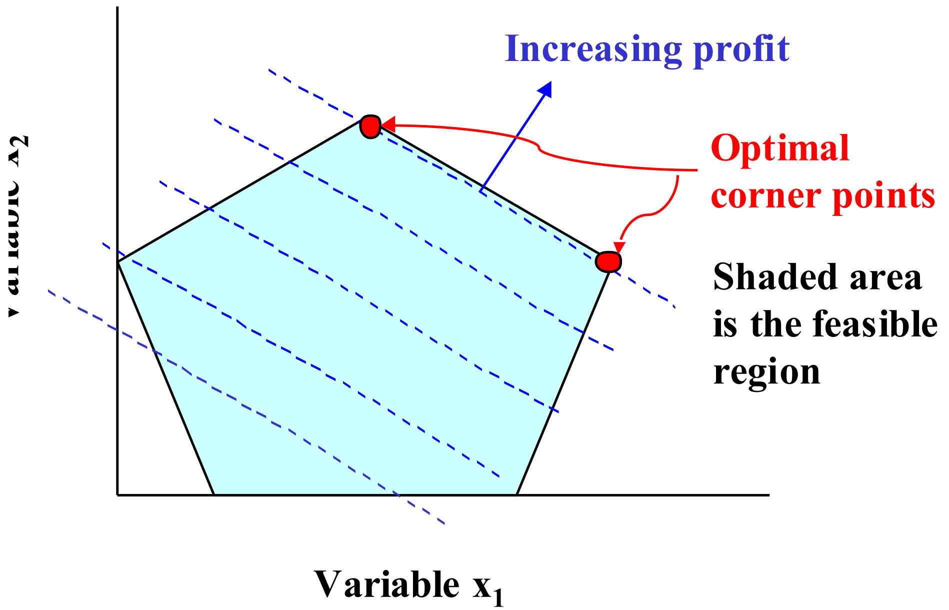
PROGRAMACIÓN LINEAL

The LP Simplex Algorithm Weird Events

ALTERNATIVE OPTIMA

- **Remedial action-** We have found the best value of the Función objetivo!

  We likely prefer one of the different sets of x values. We would like to know all solutions and select the "best", using additional criteria.

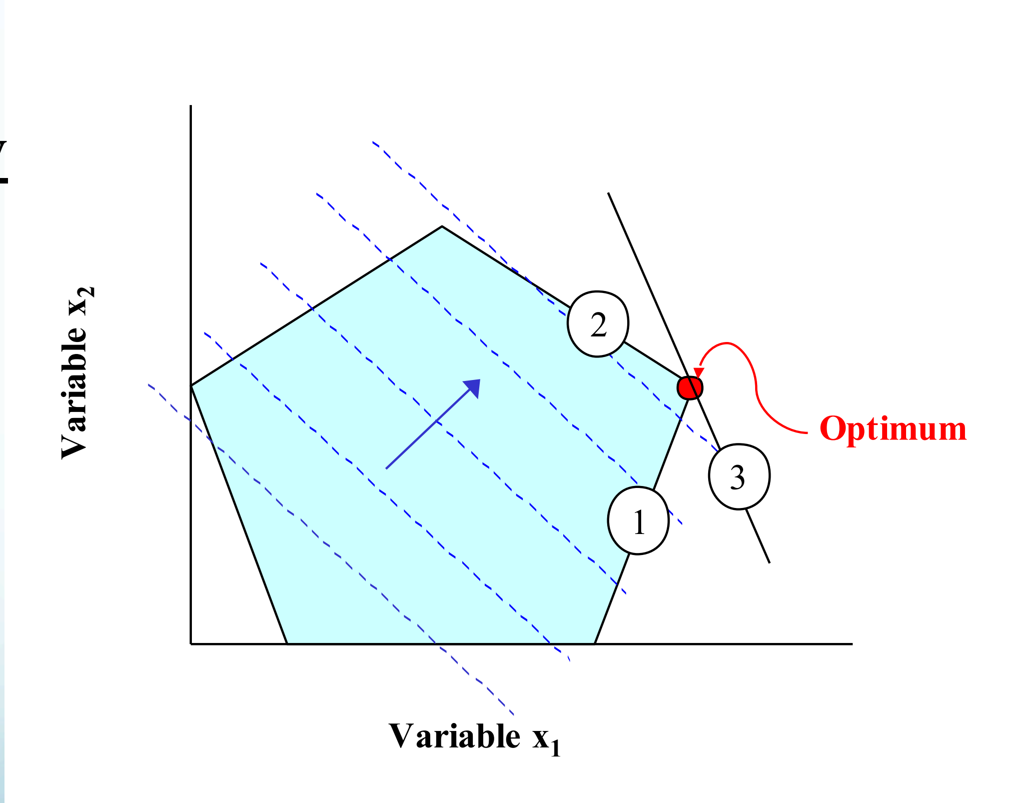


Solution Diagnosis

PROGRAMACIÓN LINEAL

The LP Simplex Algorithm Weird Events

CONSTRAINT DEGENERACY: Redundancy



- **Diagnosis -**
- **Remedial Action -**

PROGRAMACIÓN LINEAL

The LP Simplex Algorithm Weird Events

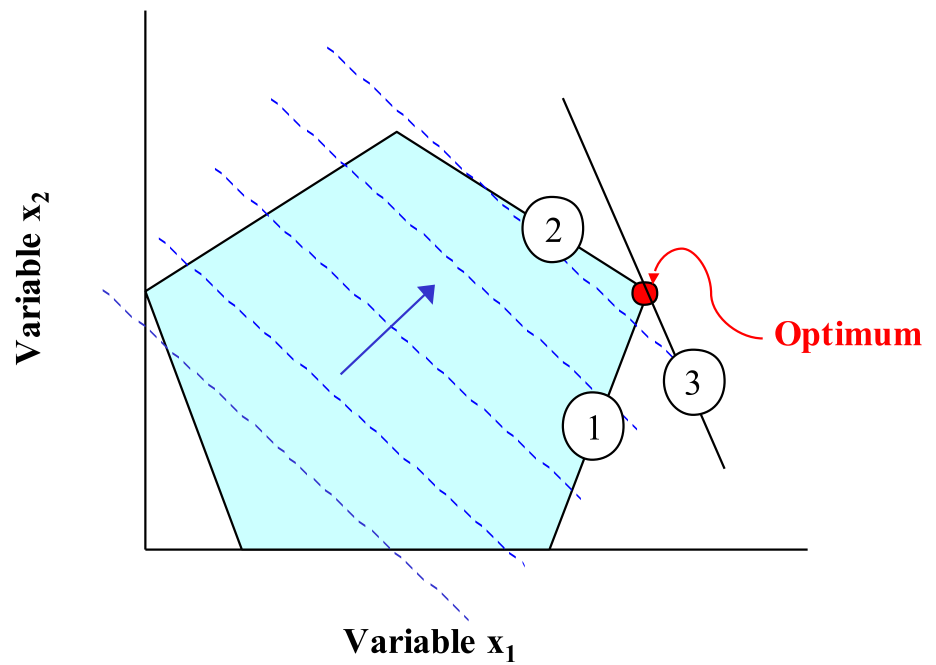
CONSTRAINT

DEGENERACY: Redundancy

- **Remedial action-** The solution is correct.

  The sensitivity information is not reliable!

  If you need sensitivity information, introduce the change (rhs, cost, etc.) and rerun the optimization.

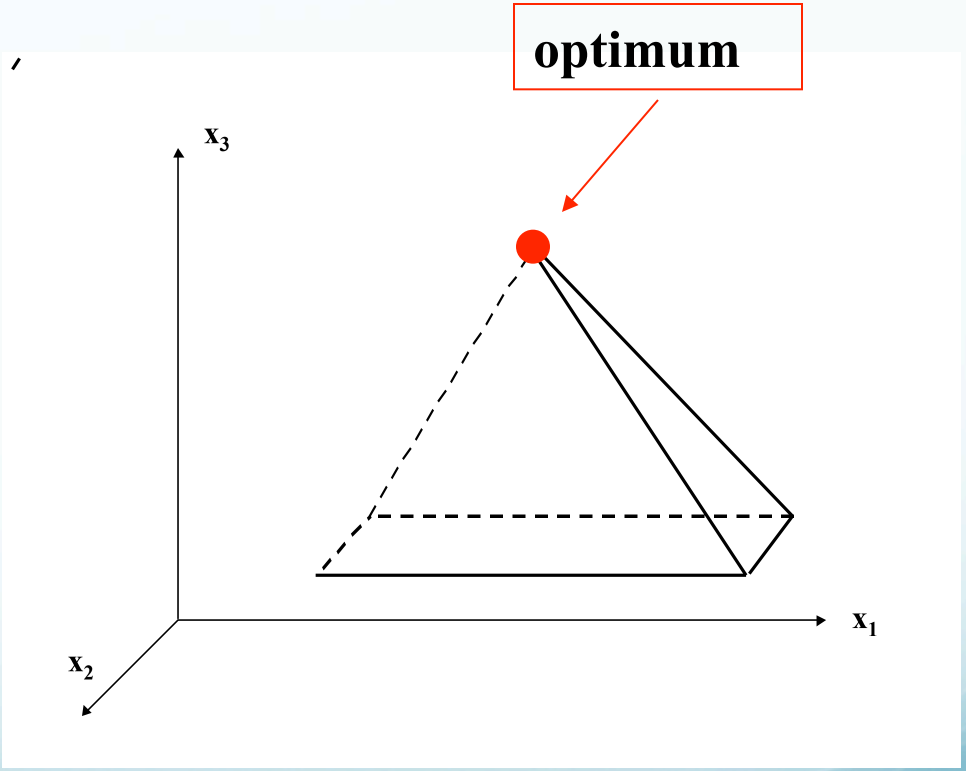


Solution Diagnosis

PROGRAMACIÓN LINEAL

The LP Simplex Algorithm Weird Events

CONSTRAINT DEGENERACY:



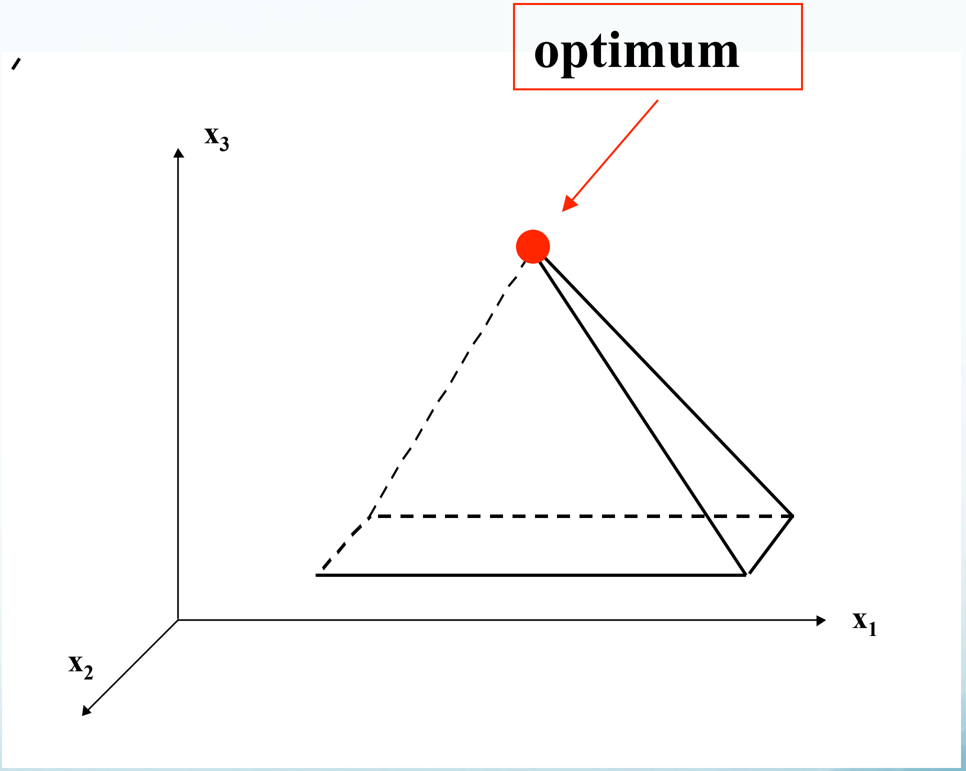
- **Diagnosis -**
- **Remedial Action -**

Solution Diagnosis

PROGRAMACIÓN LINEAL

The LP Simplex Algorithm Weird Events

CONSTRAINT DEGENERACY:



- **Diagnosis -**

  More inequalities are active (slacks = 0) than dimension of the problem.

  Software does not report warning

Solution Diagnosis

PROGRAMACIÓN LINEAL

The LP Simplex Algorithm Weird Events

CONSTRAINT DEGENERACY:

- **Remedial action -** The solution is correct.

  The sensitivity information is not reliable!

  If you need sensitivity information, introduce the change (rhs, cost, etc.) and rerun the optimization.