

Lección 3:

Conceptos básicos

$$\begin{array}{ll}\max_x & f(x) \\ \text{s.t.} & \\ & h(x) = 0 \\ & g(x) \leq 0 \\ & x_{\min} \leq x \leq x_{\max}\end{array}$$

FACTIBILIDAD (FEASIBILITY) Y OPTIMALIDAD (OPTIMALITY)

$$\max_x f(x)$$

s.t.

$$h(x) = 0$$

$$g(x) \leq 0$$

$$x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$$

Un punto es factible si cumple todas las restricciones.

El conjunto de todos los puntos factibles es **la región factible (S)**.

Si en un punto la restricción de desigualdad cumple la igualdad se dice que dicha restricción está **activa**.

Un punto es un **máximo global** en la región factible S si cumple:

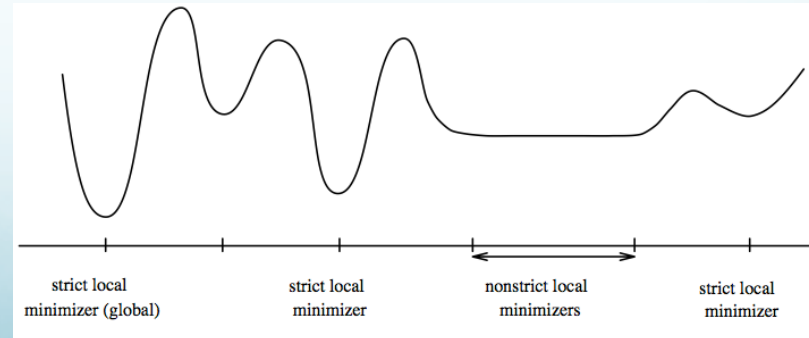
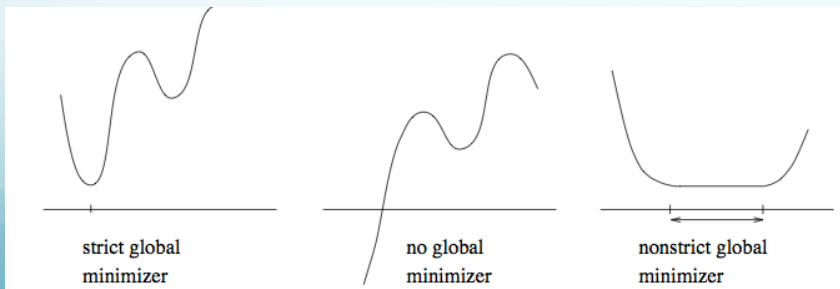
$$f(x^*) \geq f(x) \text{ para todo } x \in S$$

Es un **máximo global estricto** si cumple:

$$f(x^*) > f(x) \text{ para todo } x \neq x^* \in S$$

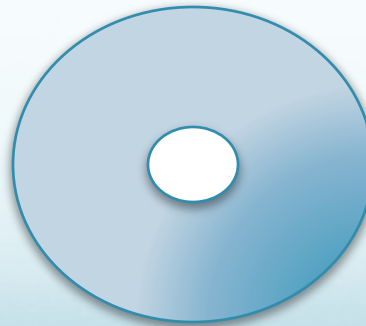
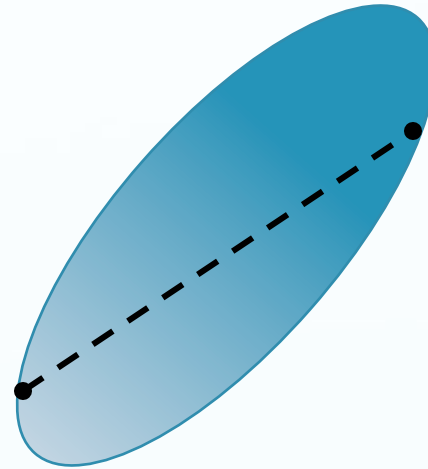
Un punto es un **máximo local** en la región factible S si cumple:

$$f(x^*) \geq f(x) \text{ para todo } x \in S \text{ s.t. } |x - x^*| < \epsilon$$



CONVEXIDAD

Una región es **convexa** si todos los puntos de una línea que conecta dos puntos de la región están en dicha.

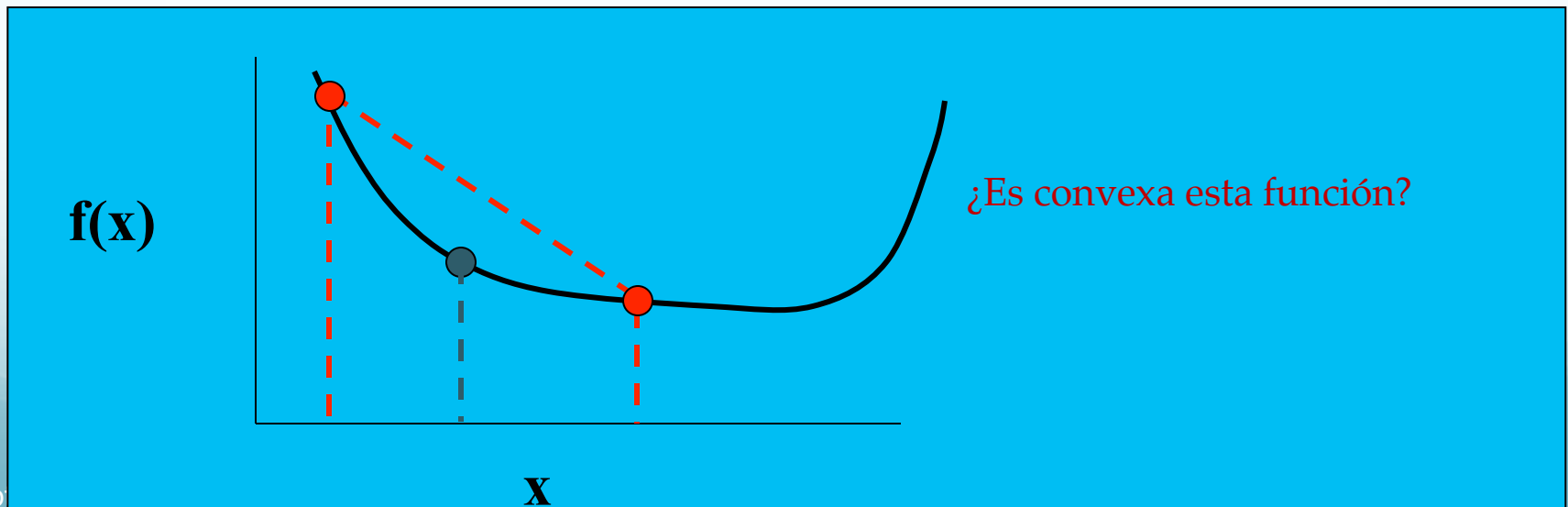


CONVEXIDAD

Convexidad y la función objetivo. Una función de $\mathbf{x}$ (vectorial) *es convexa* si cumple:

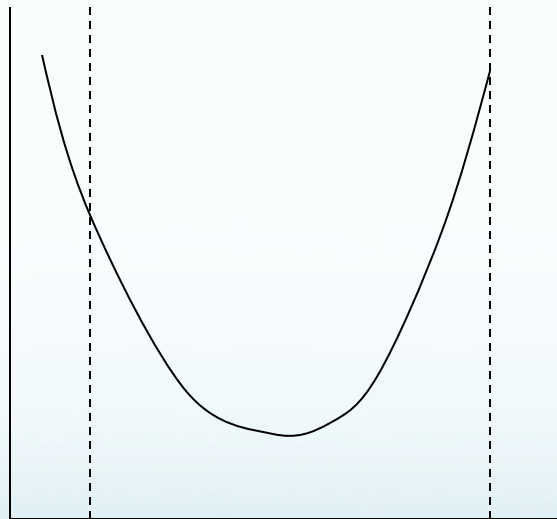
$$\mathbf{f}[\gamma \mathbf{x}_1 + (1 - \gamma) \mathbf{x}_2] \leq \gamma \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + (1 - \gamma) \mathbf{f}(\mathbf{x}_2)$$

Donde $0 \leq \gamma \leq 1$.



CONVEXIDAD

La minimización de una función convexa sobre una región convexa tiene la siguiente propiedad:

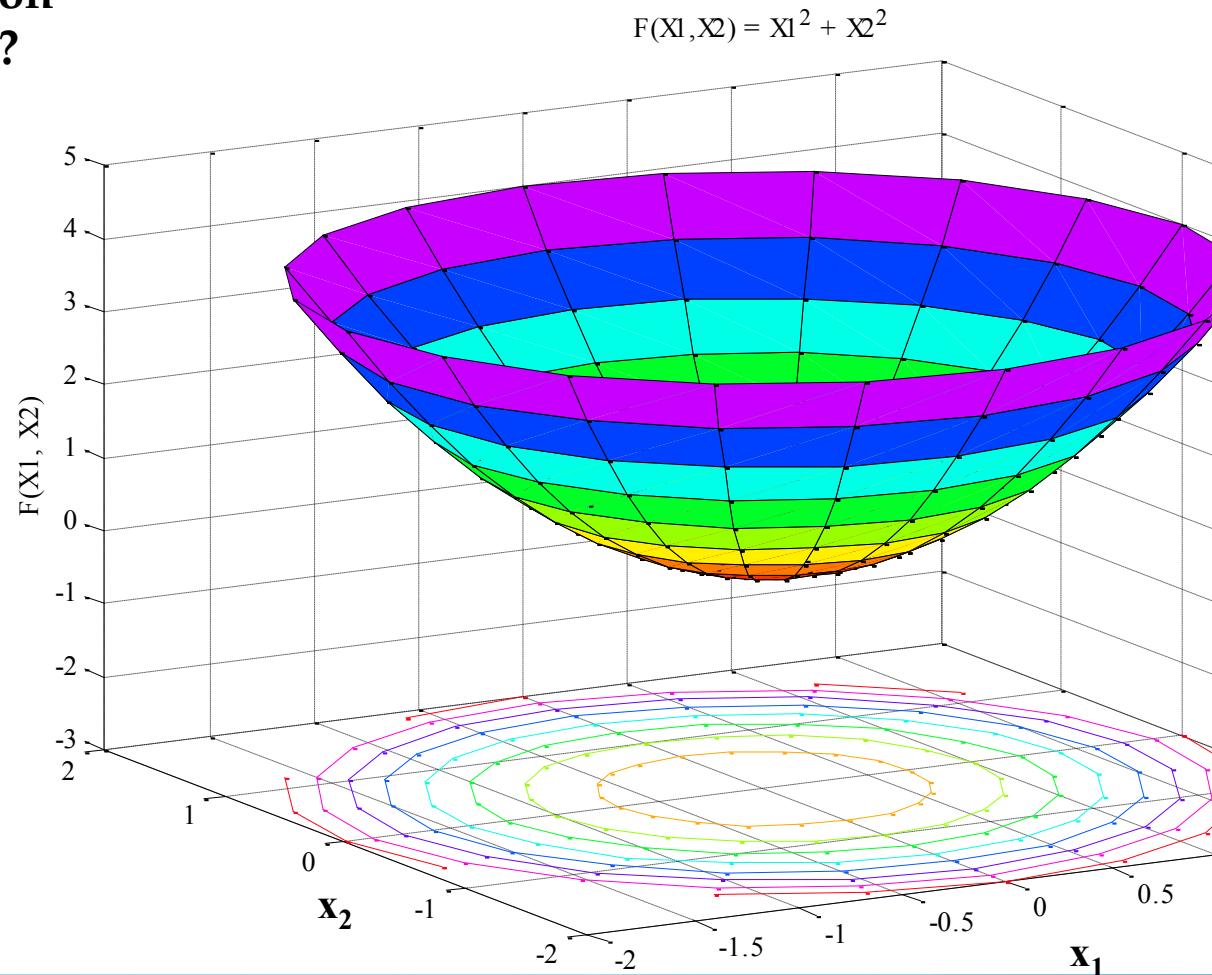


**Programación
convexa**

¡Un mínimo local es también un mínimo global!

CONVEXIDAD

¿Es convexa la función objetivo de la figura?



Determinación de la convexidad de una función

$f(x)$ es	$H(x)$ es	$x^T H(x) x$	Valores propios
Strictly convex	positive definite	>0	>0
Convex	positive semi definite	≥ 0	≥ 0
Strictly concave	negative definite	<0	<0
Concave	negative semi definite	≤ 0	≤ 0

$H(x)$ es el Hessiano (segunda derivada de la matriz)

¿Son convexas las siguientes funciones?

$$|\lambda I - A| = 0$$

$f(x) = 2x_1^2 - 3x_1x_2 + 2x_2^2$	$\longrightarrow$	$\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$	$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 7$	convexa
$f(x) = x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 + 4$	$\longrightarrow$	$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$	$\lambda_1 = 1 + \sqrt{-8}, \lambda_2 = 1 - \sqrt{-8}$	??
$f(x) = 2x_1 - 3x_2 + 6$	$\longrightarrow$	$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$	convexa y cóncava

Las siguientes restricciones:
¿forman una región convexa?

$$-x_1^2 + x_2 \geq 1$$

$$x_1 - x_2 \geq -2$$

$$g_1(x) = -x_1^2 + x_2 - 1 \geq 0$$

$$g_2(x) = x_1 - x_2 + 2 \geq 0$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

convexa

CONVEXA

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

convexa y

cóncava

OPTIMIZACIÓN NUMÉRICA

Es el único procedimiento (frente a optimización gráfica y analítica) que permite abordar problemas complejos.

*Problema: dificultad en encontrar el **óptimo global** en algunos casos.*

Normalmente sólo conocemos el valor de un punto (x_k y $f(x_k)$) y alguna información local adicional (derivadas,...)

Procedimiento básico de optimización numérica

1. Determinar un *buen siguiente punto* que mejore la función objetivo
2. Comprobar si se puede seguir mejorando. Si se puede volver al punto 1.
3. Parar en un mínimo local.

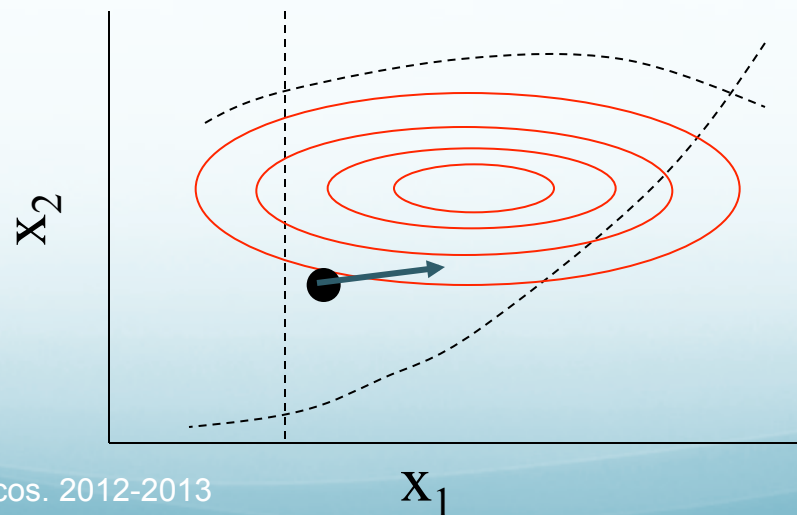


OPTIMIZACIÓN NUMÉRICA

Optimización numérica empleando información local

A partir del punto inicial, cómo decidimos:

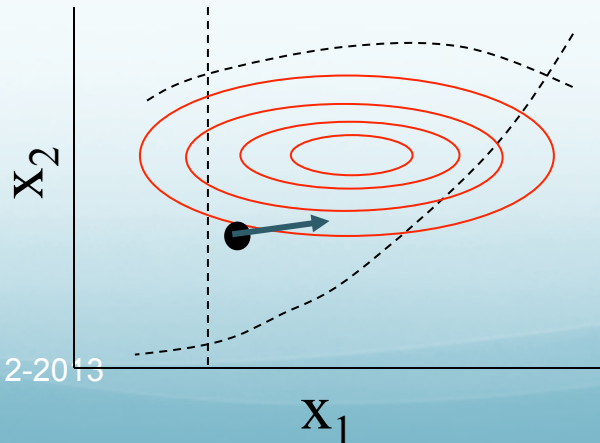
- **La dirección del cambio**
- **La distancia en esa dirección**
- **Si es posible mejorar más**



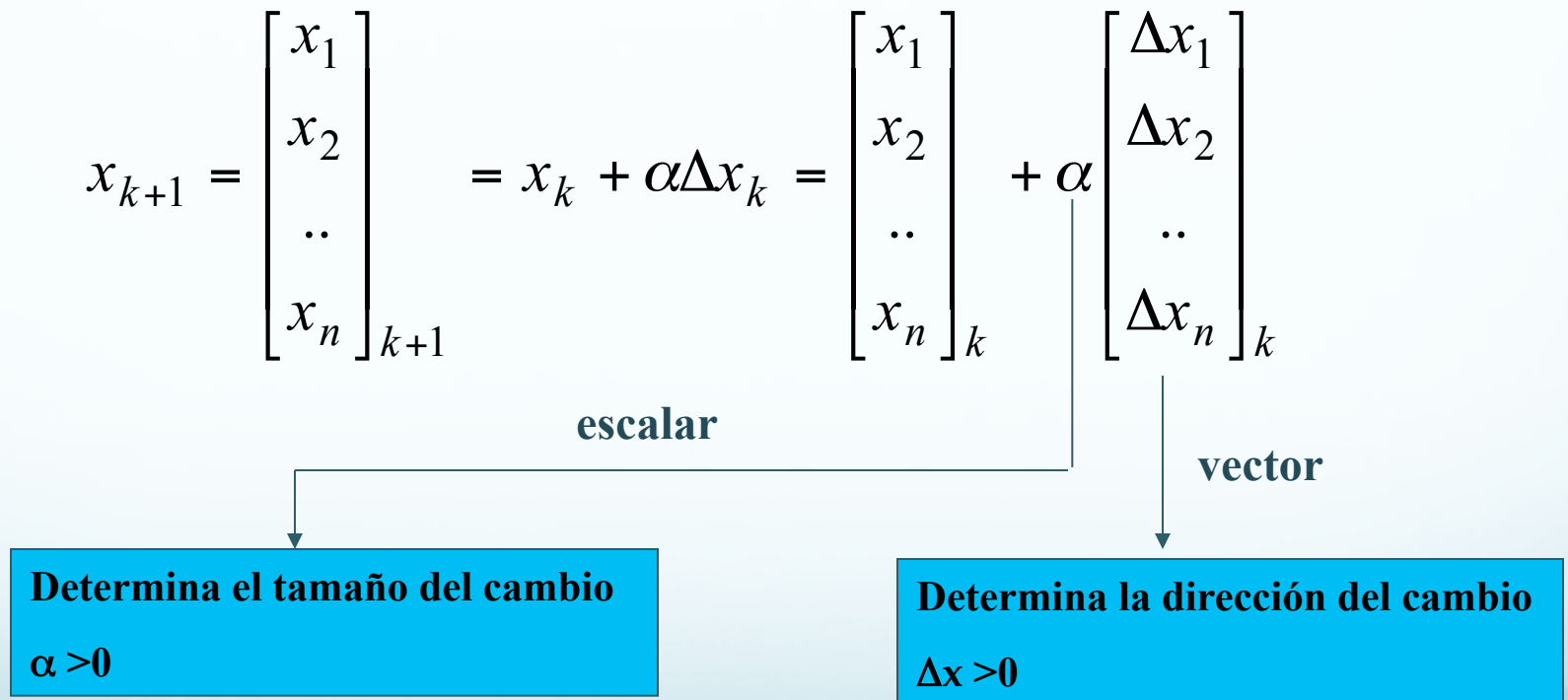
OPTIMIZACIÓN NUMÉRICA

La ecuación básica:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{k+1} = x_k + \alpha \Delta x_k = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_k + \alpha \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix}_k$$



NUMERICAL OPTIMIZATION



NUMERICAL OPTIMIZATION

- ¿Cómo determinamos α and Δx ?
- ¿Cómo sabemos cuando parar?



$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{k+1} = x_k + \alpha \Delta x_k = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_k + \alpha \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix}_k$$

Two arrows point from the terms α and Δx_k in the equation to the two boxes below.

- Debe permanecer en la región factible
- No es demasiado grande, hace que la función objetivo pueda disminuir

- Una dirección posible
- Que mejore la función objetivo