Método de las gran M

Éste método añade variables artificiales, que no deben de aparecer en la solución óptima final

$P_o = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$ Objetivo original

$P_a = c_1x_1 + \dots + c_nx_n + Mx_{a1} + \dots + Mx_{am}$ Objetivo modificado

Las variables artificiales dan una solución inicial en forma canónica.

$$
\begin{array}{llllll}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + .. + a_{1n}x_n & + x_{n+1} & & & & = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + .. + a_{2n}x_n & & + x_{n+2} & & & = b_2 \\
\vdots & & & \ddots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + .. + a_{mn}x_n & & & & + x_{n+m} & = b_m
\end{array}
$$

Todas las variables “reales” valen inicialmente 0 y las variables artificiales son las que satisfacen las ecuaciones. Éstas variables tienen de coeficiente 1.

All problem variables initially set to zero

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1m} & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1n} & 1 & \cdots & 0 \\
\cdots & & & \cdots & \cdots & \cdots & .. & 1 & .. \\
a_{m1} & & a_{mm} & a_{m,m+1} & \cdots & a_{mn} & 0 & .. & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
x_1 \\ \cdots \\ x_n \\ x_{a1} \\ \cdots \\ x_{am}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
b_1 \\ \cdots \\ b_m
\end{bmatrix}
$$

The artificial variables form a basis that ensures a non-singular solution to the equations.

En el óptimo todas las variables artificiales deben de valer 0.

Se consigue poniendo una alta penalización a las mismas en la función objetivo, la “gran M”.

La resolución es en forma de tabla como en los casos anteriores

Coeficientes función objetivo

$$\begin{bmatrix} -1 & c_1 & c_2 & \dots & 0 & 0 & M & \dots & M \\ 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 & .. \\ 0 & a_{m1} & a_{mm} & a_{m,m+1} & \dots & a_{mn} & 0 & .. & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \\ \dots \\ x_{am} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ b \end{bmatrix}$$

Coeficientes de restricciones LHS

Variables artificiales

Coeficientes de restricciones RHS

Ejemplo de resolución empleando el método de la gran M

$$\min \quad z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t.$$

$$0.5x_1 + 0.25x_2 \le 4$$

$$x_1 + \quad 3x_2 \ge 20$$

$$x_1 + \quad x_2 = 10$$

$$x_i \ge 0 \quad \text{for} \quad i = 1,2$$

Convertir el problema a estándar añadiendo variables de holgura

$$
\begin{aligned}
&\min \quad z = 2x_1 + 3x_2 \\
&s.t. \\
&0.5x_1 + 0.25x_2 \le 4 \\
&\quad x_1 + \quad 3x_2 \ge 20 \\
&\quad x_1 + \quad x_2 = 10 \\
&x_i \ge 0 \text{ for } i = 1,2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\min \quad z = 2x_1 + 3x_2 \\
&s.t. \\
&0.5x_1 + 0.25x_2 + s_1 = 4 \\
&\quad x_1 + \quad 3x_2 - s_2 = 20 \\
&\quad x_1 + \quad x_2 \quad = 10 \\
&x_i \ge 0 \text{ for } i = 1,2
\end{aligned}
$$

Añadir variables artificiales para encontrar una solución inicial factible.

$$
\begin{aligned}
&\min \quad z = 2x_1 + 3x_2\\
&s.t.\\
&0.5x_1 + 0.25x_2 + s_1 = 4\\
&x_1 + 3x_2 - s_2 = 20\\
&x_1 + x_2 = 10\\
&x_i \geq 0 \quad \text{for} \quad i = 1,2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\min \quad z = 2x_1 + 3x_2\\
&s.t.\\
&0.5x_1 + 0.25x_2 + s_1 = 4\\
&x_1 + 3x_2 - s_2 + a_2 = 20\\
&x_1 + x_2 + a_3 = 10\\
&x_i \geq 0 \quad \text{for} \quad i = 1,2
\end{aligned}
$$

Añadir altas penalizaciones a las variables en la función objetivo.

$$
\begin{array}{l}
\min \quad z = 2x_1 + 3x_2 + Ma_2 + Ma_3 \\
s.t. \\
0.5x_1 + 0.25x_2 + s_1 = 4 \\
x_1 + 3x_2 - s_2 + a_2 = 20 \\
x_1 + x_2 + a_3 = 10 \\
x_i \geq 0 \quad \text{for} \quad i = 1,2
\end{array}
$$

Formular el problema en forma de tabla

¡¡¡NOTA!!! En este caso la función objetivo se ha despejado al revés a lo visto en el método anterior poníamos (*$z-2x_1-3x_2-Ma_2-Ma_3$*), por eso se escogerá el menor valor negativo en lugar del mayor positivo. ¡Y se acabará cuando todos sean positivos!

$$-\mathbf{z}+2\mathbf{x}_1+3\mathbf{x}_2+\mathbf{Ma}_2+\mathbf{Ma}_3=0$$

$$\begin{aligned}
&\min \quad z = 2x_1 + 3x_2 + Ma_2 + Ma_3\\
&s.t.\\
&0.5x_1 + 0.25x_2 + s_1 = 4\\
&x_1 + 3x_2 - s_2 + a_2 = 20\\
&x_1 + x_2 + a_3 = 10\\
&x_i \geq 0 \ \text{ for } \ i = 1,2
\end{aligned}$$

z	x_1	x_2	s_1	s_2	a_2	a_3	rhs	Basic variable	Ratio
-1	2	3	0	0	M	M	0	z	
0	.5	.25	**1**	0	0	0	4	s_1	---
0	1	3	0	-1	**1**	0	20	a_2	---
0	1	1	0	0	0	**1**	10	a_3	---

Canonical form: Buscamos que todas las variables básicas tengan una columna con un 1 y el resto de elementos 0.

Luego operamos para tener esta condición en las variables a_2 y a_3

Ahora el problema está en una solución factible (vértice) y en forma canónica.

Empezamos el procedimiento cambiando una variable de la base (cambiar a un vértice adyacente) para:

1. Mejorar la función objetivo
2. Mantener la solución factible.

Initial tableau

This (x_2) is the variable entering the basis (smallest value < 0).

z	x_1	x_2	s_1	s_2	a_2	a_3	rhs	Basic variable	Ratio
-1	-2M+2	-4M+3	0	M	0	0	-30M	z	
0	.5	.25	**1**	0	0	0	4	s_1	16
0	1	3	0	-1	**1**	0	20	a_2	20/3
0	1	1	0	0	0	**1**	10	a_3	10

Pivot element, a_{rs}

This (a_2) is the variable leaving the basis.
(Smallest value of b_i/a_{ij} for entering a_{ij} >0)

Si la solución no es óptima seguimos con el procedimiento.

tableau

This (x_1) is the variable entering the basis (smallest < 0).

z	x_1	x_2	s_1	s_2	a_2	a_3	rhs	Basic variable	Ratio
-1	-2M/3+1	0	0	-M/3+1	+4M/3-1	0	-10M/3-20	z	
0	5/12	0	1	1/12	-1/12	0	7/3	s_1	28/5
0	1/3	1	0	-1/3	1/3	0	20/3	x_2	20
0	2/3	0	0	1/3	-1/3	1	10/3	a_3	5

Pivot element, a_{rs}

This (a_3) is the variable leaving the basis.
(Smallest value of b_i/a_{ij} for entering a_{ij} >0)

Third tableau

All reduced costs are greater than 0.0. The objective cannot be decreased by changing the basis, i.e., moving to an adjacent corner point. We have found the *optimum*!

z	x_1	x_2	s_1	s_2	a_2	a_3	rhs	Basic variable	Ratio
-1	0	0	0	1/2	-1/2+M	-3/2+M	-25	$z = 25$	
0	0	0	1	-1/8	1/8	-5/8	1/4	$s_1 = 1/4$	---
0	0	1	0	-1/2	1/2	-1/2	5	$x_2 = 5$	---
0	1	0	0	1/2	-1/2	3/2	5	$x_1 = 5$	---

10. In this problem, the optimum was reached after the artificial variables were eliminated. Typically, (many) additional corner points would have to be evaluated using the pivoting procedure.

The solution is $x_1 = 5$, $x_2 = 5$; slack variables values are $s_1 = ¼$ and $s_2 = 0$. The objective function value is $z = 25$.

PROGRAMACIÓN LINEAL

Problema

$$
\begin{aligned}
&\min \quad z = 2x_1 + 3x_2 \\
&s.t. \\
&0.5x_1 + 0.25x_2 \le 4 \\
&\quad x_1 + \quad 3x_2 \ge 20 \\
&\quad x_1 + \quad x_2 = 10 \\
&x_i \ge 0 \quad \text{for} \quad i = 1,2
\end{aligned}
$$

Solución

$z = 25$ — Función objetivo

$3.75 \le 4.0$ — inactive

$20 \ge 20$ — active

$10 = 10$ — active

$x_1 = 5 \ge 0$ — inactive

$x_2 = 5 \ge 0$ — inactive

variables

¿Puedo saber algo más con la solución?

Análisis de sensibilidad

Cómo afecta el cambio de parámetros en la solución.

Problema

$$\min \quad z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t.$$

$$0.5x_1 + 0.25x_2 \leq 4$$

$$x_1 + \quad 3x_2 \geq 20$$

$$x_1 + \quad x_2 = 10$$

$$x_i \geq 0 \quad \text{for} \quad i = 1,2$$

Cómo afecta un cambio en este parámetro en z y en los valores de x*?

¡Sin tener que resolver de nuevo el problema!

Los coeficientes de la función objetivo de las variables originales se denominan: costes reducidos

Los coeficientes de la función objetivo de las demás variables (holgura) se denominan: precios sombra o duales

En el **óptimo**:

O la variable es cero (no básica) o el precio dual o el coste reducido es cero.

En el caso de que ambos sean cero:

Existe solución degenerada si la variable es básica

Existen múltiples óptimos si la variable es no básica

Análisis de sensibilidad

- **Sensibilidad= $\Delta z/\Delta\alpha$ con todas las variables básicas, x_B, pueden cambiar luego la solución es un nuevo óptimo.**

1. **Los resultados se limitan a los óptimos con las mismas restricciones activas que el caso base, es decir, no requiere cambiar la base escogida.**
2. **Los resultados definen el rango de cambio de parámetros (coeficientes función objetivo o constantes de RHS) que implican que no hay cambio en las restricciones activas.**
3. **El resultado proporciona un valor exacto, cuantitativo de $\Delta OBJ^*/\Delta parametro$**

Análisis de sensibilidad

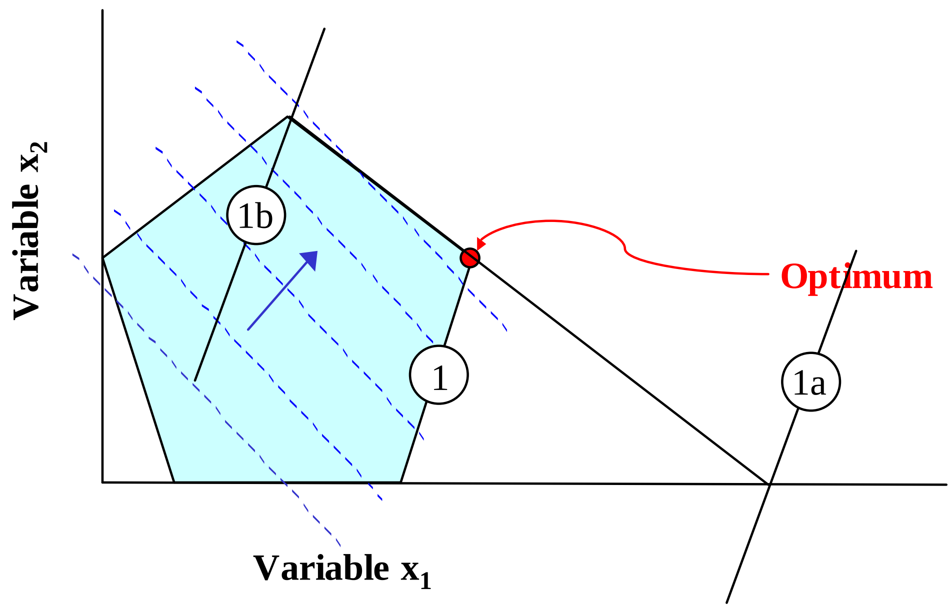
El software presenta informes con el valor y rango de la sensibilidad de cada restricción. Fuera de ese rango la base cambia.

Constraint ID	**Status (Binding/ non-binding) (Active/inactive)**	**slack**	**Shadow price (sensitivity of rhs)**	**Maximum allowable increase (AI)**	**Maximum allowable decrease (AD)**
Max. Reflux flow	Active	0	3.74	47	123
Max. Pump 7	Inactive	321	0	1.0E30	321

Shadow price = ΔOBJ*/ΔRHS, has units!

Análisis de sensibilidad

Cambios en el parámetro RHS



Cuánto puedo cambiar la restricción 1 sin cambiar de base?

Los valores de x* cambian!

Los valores de las variables (si la restricción está activa) y de la función objetivo variarán, pero la base permanece.

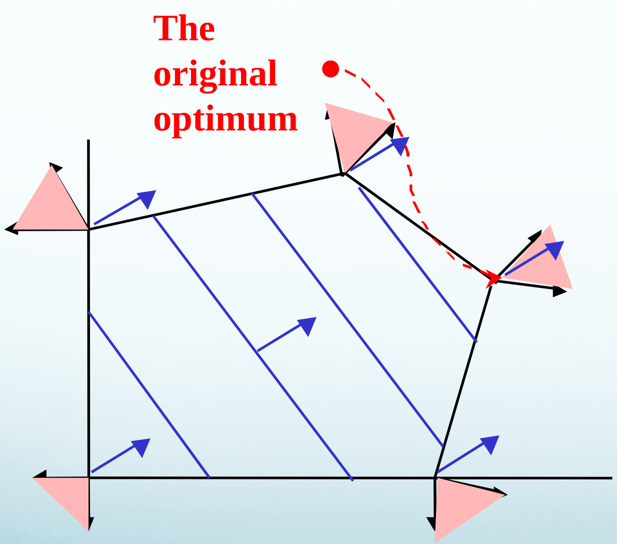
El nuevo valor de la función objetivo será:

$$Znew = Zoriginal - \text{precio sombra} \times \Delta b$$

Análisis de sensibilidad

Función objetivo = z = $\Sigma c_j x_j$

Sensibilidad a un cambio en un coeficiente de la función objetivo.



Original problem

Cambios en c_j que no cambian la base,

$\Delta x = 0$

$$\Delta z = \Delta \Sigma c_j x_j = \Sigma \Delta c_j (x_j)$$

$$= \Delta c_k (x_k)$$

Donde k = el coeficiente cambiado

Los valores de *las variables en el nuevo óptimo no cambian*, al no variar las restricciones y no cambiar la base. Luego el óptimo es el mismo punto en el espacio.

El nuevo valor objetivo se calcula poniendo los valores de las variables en la nueva función objetivo, dado que cada vez se varía un coeficiente se puede calcular el cambio en la función objetivo debido a un cambio en el coeficiente.

Análisis de sensibilidad

$$\min_{x} z = c^T x$$

$$s.t.$$

$$A\,x = b$$

$$x_{min} \geq x \geq x_{max}$$

En general cambios en los coeficiente "A" del LHS, implican que el problema se debe resolver de nuevo.

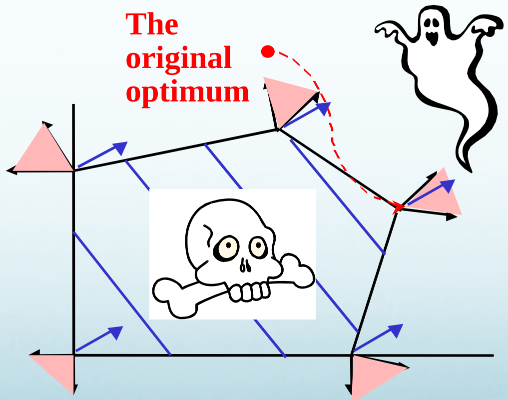
Animación análisis sensibilidad

The LP Simplex Algorithm Weird Events

We must <u>monitor and diagnose</u> the LP solution. We could have made a formulation error, or we could have defined a problem that is correct but has special, unusual, properties.

We must monitor for weird effects.

Let's learn to
- **diagnose and**
- **correct (if possible).**



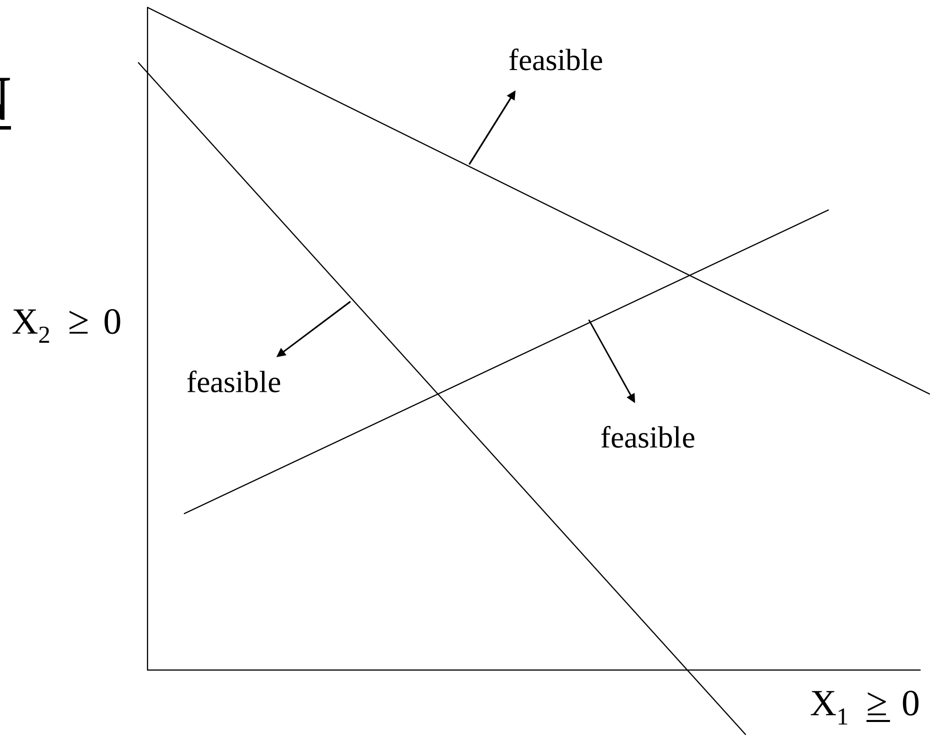
Original problem

Solution Diagnosis

PROGRAMACIÓN LINEAL

The LP Simplex Algorithm Weird Events

<u>NO FEASIBLE SOLUTION</u>



- **Diagnosis -**
- **Remedial Action -**

Solution Diagnosis

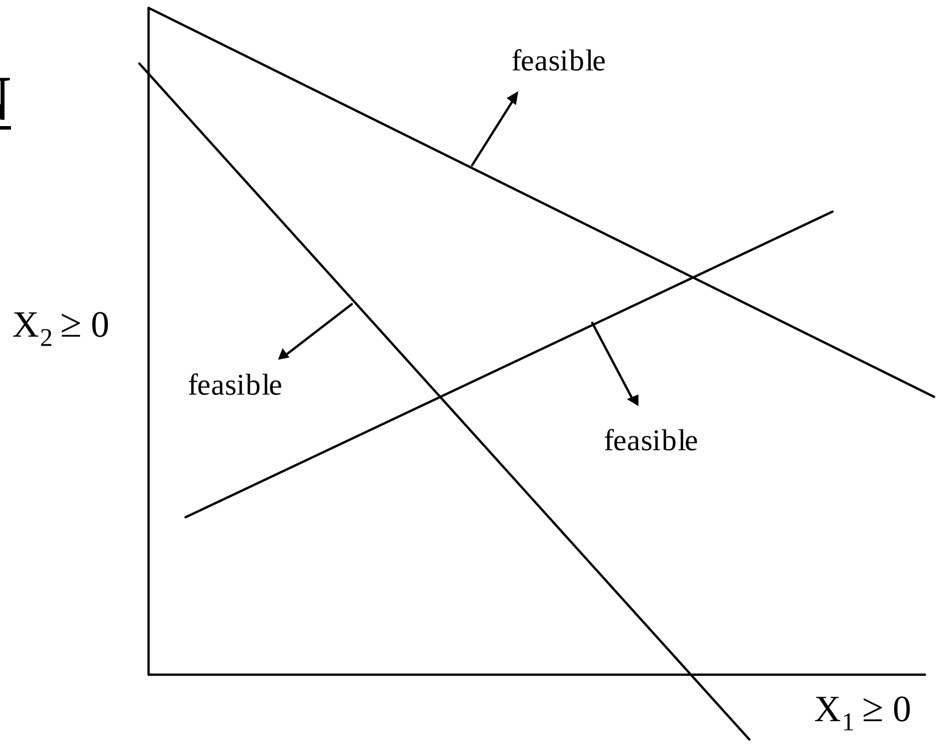
PROGRAMACIÓN LINEAL

The LP Simplex Algorithm Weird Events

NO FEASIBLE SOLUTION

- **Diagnosis** - **At least one artificial variable in optimal basis** - **software reports this as infeasible**.
- **Remedial Action** - **reformulate, if appropriate**

(See goal programming)



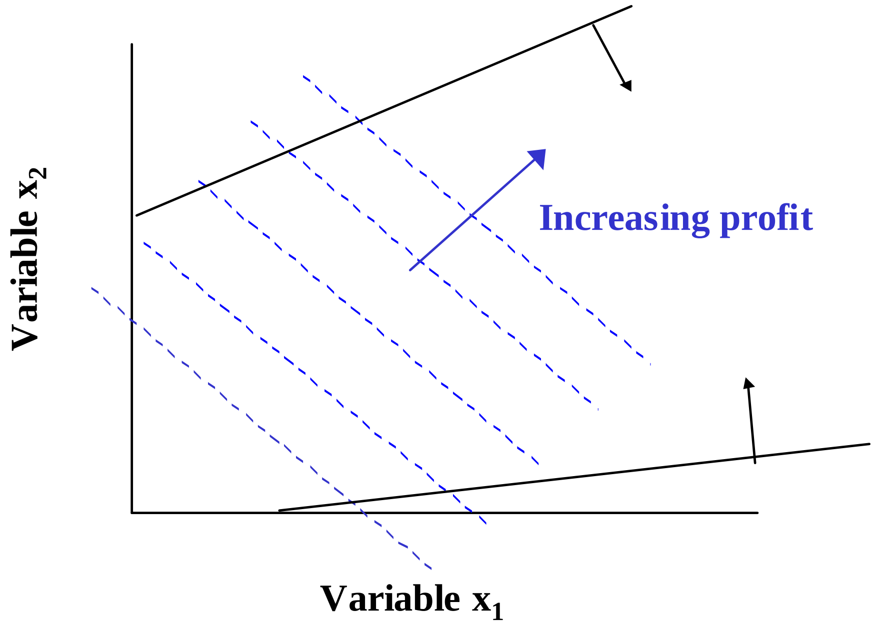
Solution Diagnosis

PROGRAMACIÓN LINEAL

The LP Simplex Algorithm Weird Events

UNBOUNDED SOLUTION

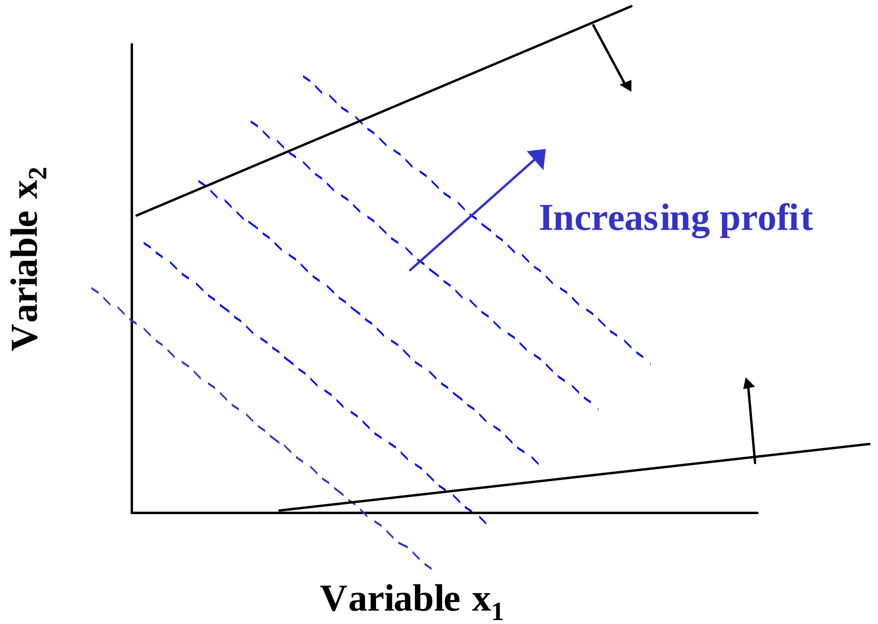
- **Diagnosis -**
- **Remedial Action -**



Solution Diagnosis

PROGRAMACIÓN LINEAL

The LP Simplex Algorithm Weird Events



UNBOUNDED SOLUTION

- **Diagnosis - The distance to the best adjacent corner point is infinity - software will report.**

- **Remedial Action - Reformulate, which is always possible - realistic variables never go to ∞**

Solution Diagnosis

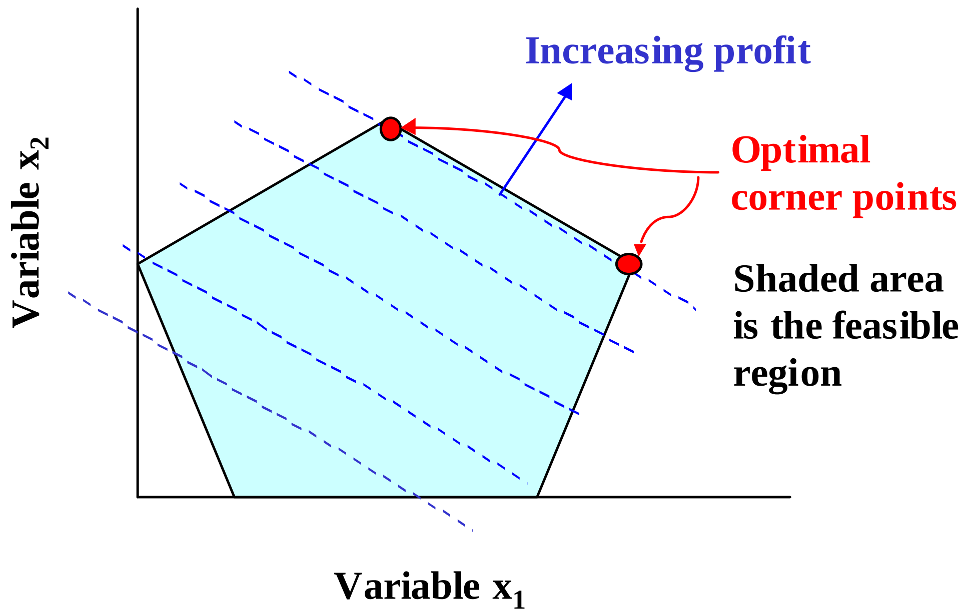
PROGRAMACIÓN LINEAL

The LP Simplex Algorithm Weird Events

ALTERNATIVE OPTIMA

- **Diagnosis -**

- **Remedial Action -**



Solution Diagnosis

PROGRAMACIÓN LINEAL

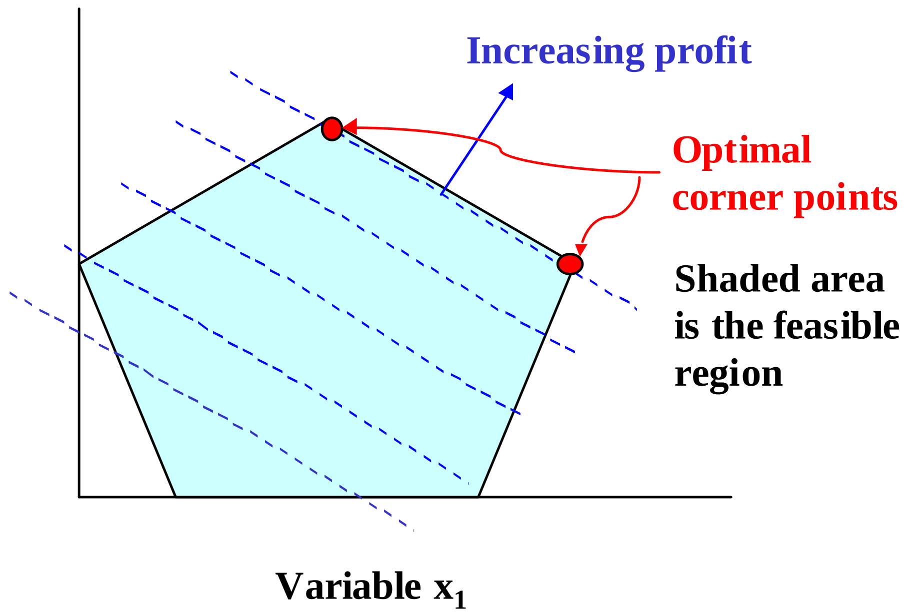
The LP Simplex Algorithm Weird Events

ALTERNATIVE OPTIMA

- **Diagnosis 1 - The basis can change with no change in objective.**

  One or more non-basic variables has a zero marginal cost.

  Software does not report warning



Solution Diagnosis

PROGRAMACIÓN LINEAL

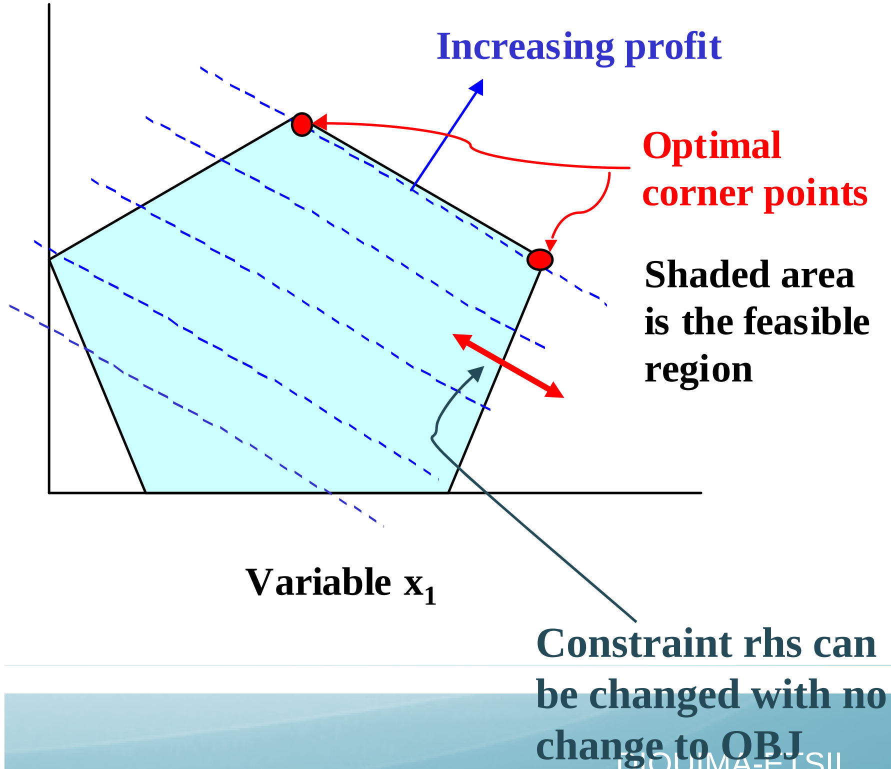
The LP Simplex Algorithm Weird Events

ALTERNATIVE OPTIMA

- **Diagnosis 2 - One or more active constraint rhs can be changed without affecting the objective.**

  An active constraint has a zero marginal value and non-zero range (both ways).

  Software does not report warning



Solution Diagnosis

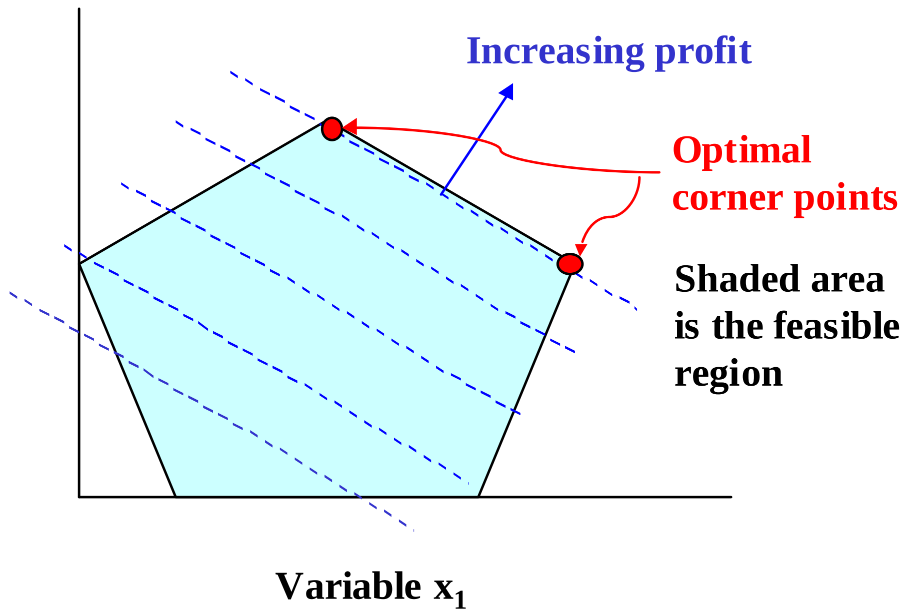
PROGRAMACIÓN LINEAL

The LP Simplex Algorithm Weird Events

ALTERNATIVE OPTIMA

- **Remedial action-** We have found the best value of the Función objetivo!

  We likely prefer one of the different sets of x values. We would like to know all solutions and select the "best", using additional criteria.



Solution Diagnosis

PROGRAMACIÓN LINEAL

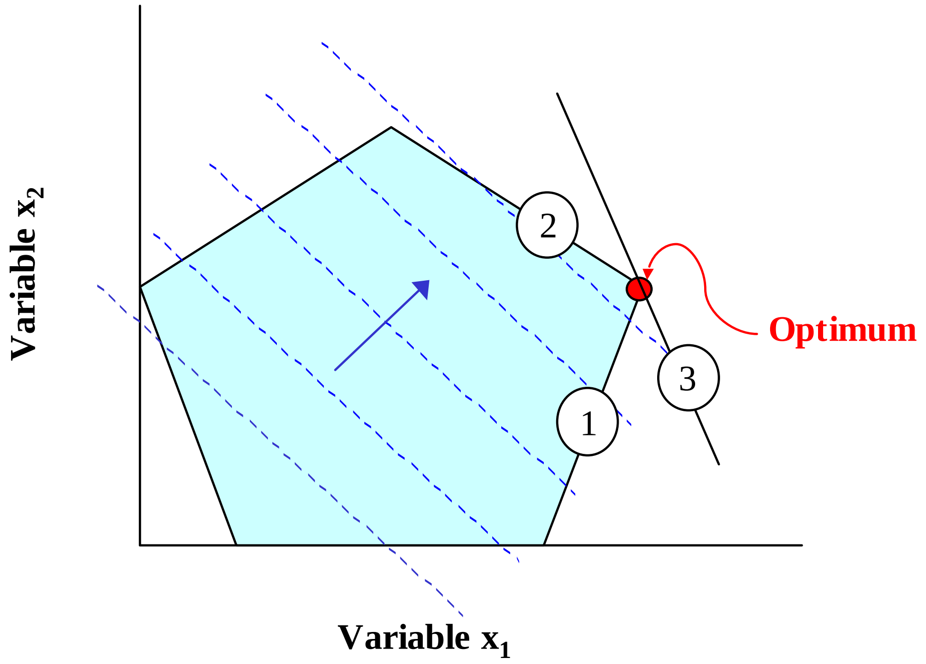
The LP Simplex Algorithm Weird Events

CONSTRAINT

DEGENERACY: Redundancy

- **Diagnosis -**

- **Remedial Action -**



PROGRAMACIÓN LINEAL

The LP Simplex Algorithm Weird Events

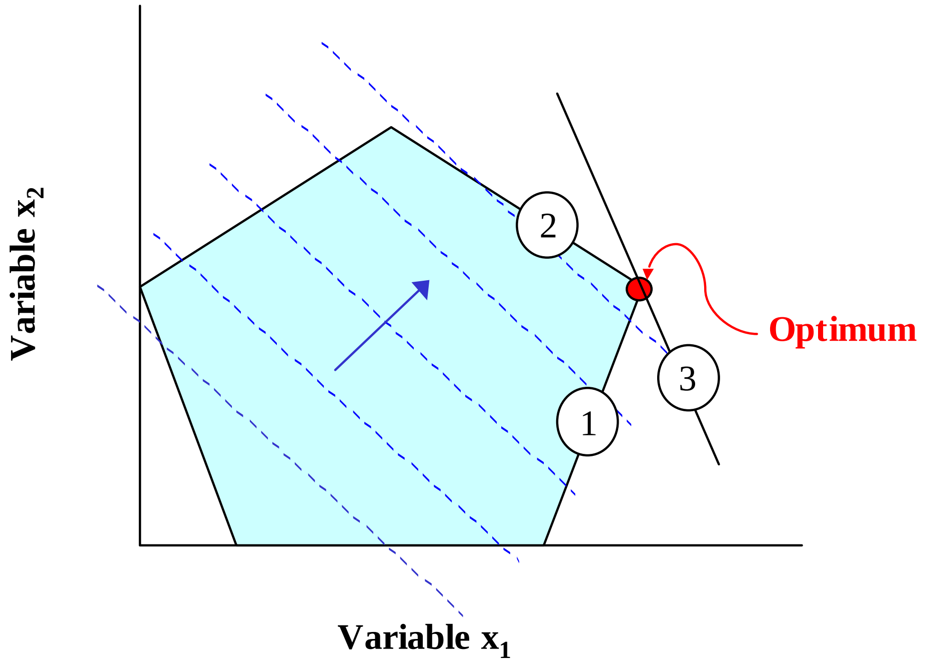
CONSTRAINT

DEGENERACY: Redundancy

- **Remedial action- The solution is correct.**

  The sensitivity information is not reliable!

  If you need sensitivity information, introduce the change (rhs, cost, etc.) and rerun the optimization.



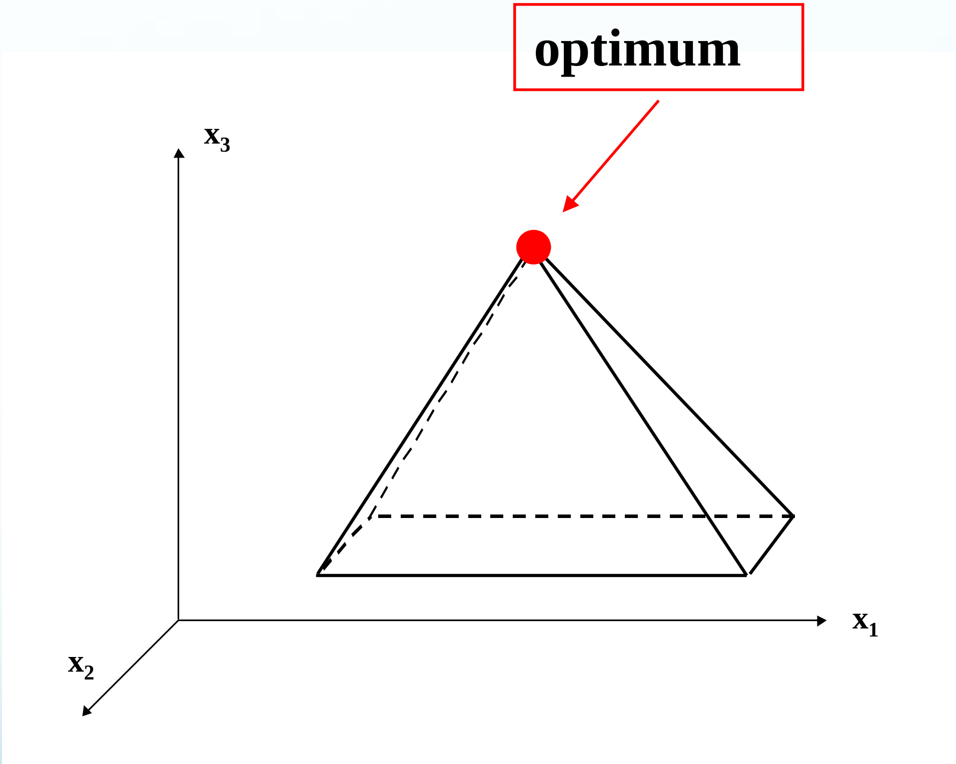
Solution Diagnosis

PROGRAMACIÓN LINEAL

The LP Simplex Algorithm Weird Events

CONSTRAINT

DEGENERACY:



- **Diagnosis -**

- **Remedial Action -**

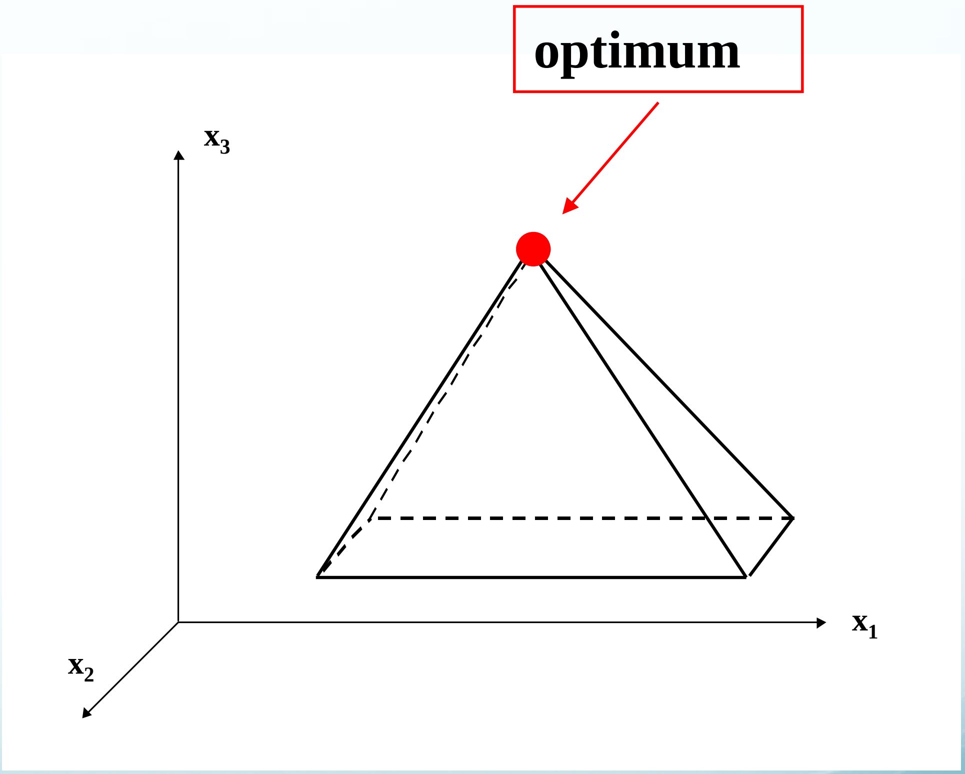
Solution Diagnosis

PROGRAMACIÓN LINEAL

The LP Simplex Algorithm Weird Events

CONSTRAINT

DEGENERACY:



- **Diagnosis -**

More inequalities are active (slacks = 0) than dimension of the problem.

Software does not report warning

Solution Diagnosis

PROGRAMACIÓN LINEAL

The LP Simplex Algorithm Weird Events

CONSTRAINT

DEGENERACY:

- **Remedial action - The solution is correct.**

  The sensitivity information is not reliable!

  If you need sensitivity information, introduce the change (rhs, cost, etc.) and rerun the optimization.