Capítulo 1

Depósito

1.1 Enunciado

Se dispone de un depósito que se vacía por gravedad y se quiere modelar y simular su comportamiento teniendo en cuenta los siguientes datos: Altura inicial de líquido en el depósito 1 m, caudal de entrada: 3 m^3/h, área del depósito: 10 m^2, área de salida de la tubería: 0,001 m^2.

Se pide:

1. Plantear las ecuaciones que constituyen el modelo.
2. Resolver el modelo implementando el método de Euler explícito.
3. Comparar los resultados en función del paso de integración. Dibujar las curvas de evolución del sistema.

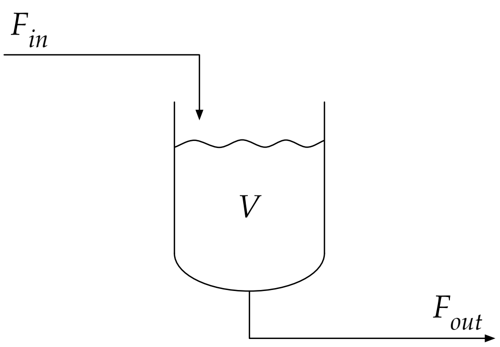

Figura 1.1: Depósito con salida por gravedad.

1.2 Modelo matemático

Leyenda

F_{in}: Caudal de entrada al depósito ($\mathrm{m^3/h}$).

F_{out}: Caudal de salida del depósito ($\mathrm{m^3/h}$).

V: Volumen en el depósito ($\mathrm{m^3}$)

h: Altura de líquido en el depósito (m).

A: Área del depósito ($\mathrm{m^2}$).

A_s: Área de la tubería de salida ($\mathrm{m^2}$).

g: Gravedad ($\mathrm{m/s^2}$).

Balance de materia

Puesto que el líquido que entra y el que sale son el mismo se puede suponer que no hay variaciones de densidad, por lo que el balance de materia se puede realizar en volumen, por tanto

$$\frac{dV}{dt} = F_{in} - F_{out} \tag{1.1}$$

pero el volumen de líquido en el reactor viene dado por

$$V = h \cdot A \tag{1.2}$$

y como la sección del depósito es constante

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(h \cdot A) = A\frac{dh}{dt} \tag{1.3}$$

el balance de materia quedaría

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A}(F_{in} - F_{out}) \tag{1.4}$$

Ecuación auxiliar

La salida del depósito por el fondo se produce, únicamente por efecto de la gravedad, por lo que

$$F_{out} = A_s \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \tag{1.5}$$

No obstante, puesto que la gravedad está expresada en $\mathrm{m/s^2}$ y el caudal debe expresarse en $\mathrm{m^3/h}$, se debe utilizar un factor de conversión (3600 s/h), por lo que

$$F_{out} = 3600 \cdot A_s \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \tag{1.6}$$

Método de Euler explícito

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{cases} y'(t_j) = f(t_j, y(t_j)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.7}$$

aplicando la aproximación *forward* de la derivada

$$\frac{y_h(t_{j+1}) - y_h(t_j)}{h} = f(t_j, y(t_j)) \tag{1.8}$$

se llega a

$$y_h(t_{j+1}) = y_h(t_j) + h \cdot f(t_j, y(t_j)) \tag{1.9}$$

en donde h es el paso del método (no confundir con la altura de líquido en el depósito).

Por tanto, para determinar el valor de la solución en un instante $y_h(t_{j+1})$ se utiliza el valor de la solución en el instante anterior $y_h(t_j)$ y el valor de la derivada también en el instante anterior $f(t_j, y(t_j))$.

1.3 m-files

Método de Euler explícito

```
function [t,x] = euler_exp(odefun,time,x0,n)

t0 = time(1);     % Instante inicial de integracion
tf = time(2);     % Instante final de integracion

h = (tf-t0)/n;    % Paso de integracion

t = (t0:h:tf);  % Vector de tiempos de integracion

% Primer punto de integracion
x(1) = x0;

for i = 2:(n+1)
    % Algoritmo de Euler para la integracion
    x(i) = x(i-1) + h*feval(odefun,t(i-1),x(i-1));
end
```

Modelo matemático del depósito

```
function dh_dt = deposito(t,h);
```

```
Fin = 3;     % Caudal de entrada en m3/h
A   = 10;    % Area del deposito en m2
As  = 0.001; % Area de salida en m2
g   = 9.81;  % Gravedad en m/s2

% Caudal de salida
if h < 0
    Fout = 0;
else
    Fout = As*3600*sqrt(2*g*h);
end

% Balance de materia
dh_dt = (Fin - Fout)/A;
```

Cuerpo principal del programa

```
close all;
clear all;
clc;

time = [0 5]; % Tiempo de integracion en h
h0 = 1;       % Altura inicial en m
n = 20;       % Numero de intervalos

% Integracion con Euler
[t,h] = euler_exp('deposito',time,h0,n);

% Representacion grafica
plot(t,h,'linewidth',2)
xlabel('Tiempo (h)')
ylabel('Altura (m)')
```

1.4 Simulación

En la Figura 1.2 se ha simulado el comportamiento del sistema dividiendo el tiempo de integración en 20 intervalos, esto es, utilizando un paso de integración de 0,25 horas. Puede apreciarse cómo el depósito se vacía hasta alcanzar el régimen estacionario en el que se estabiliza la altura.

En la Figura 1.3 se compara el comportamiento del método de resolución para diferentes pasos de integración. Se observa cómo el método se inestabiliza conforme aumenta el paso.

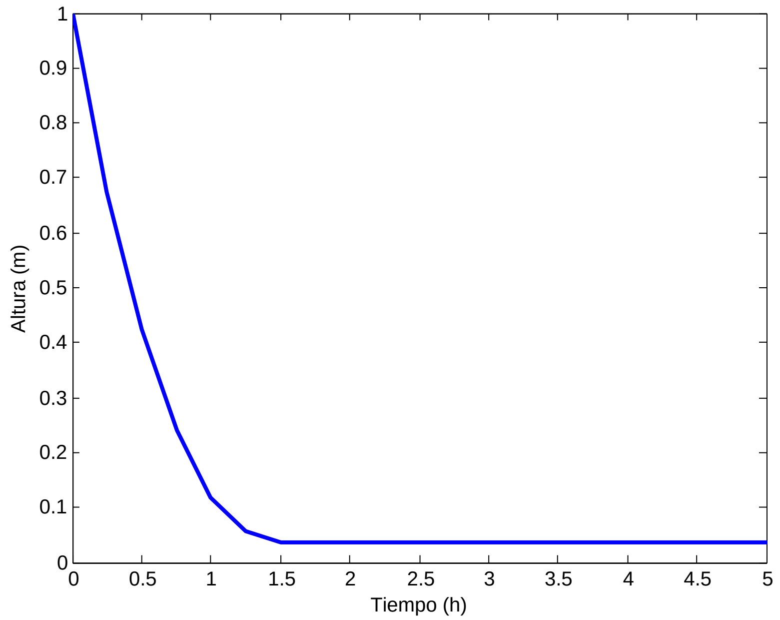

Figura 1.2: Simulación con paso de integración .

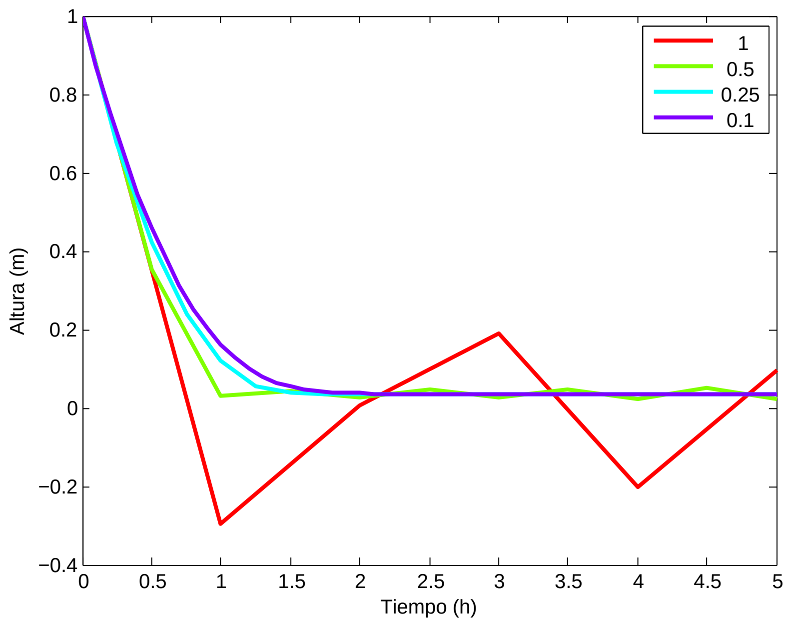

Figura 1.3: Simulación con diferentes pasos de integración.