Capítulo 1

Depósito

1.1 Enunciado

Se dispone de un depósito que se vacía por gravedad y se quiere modelar y simular su comportamiento teniendo en cuenta los siguientes datos:

- Altura inicial de líquido en el depósito: 1 m
- Caudal de entrada: 3 m^3/h
- Área del depósito: 10 m^2
- Área de salida de la tubería: 0,001 m^2

Objetivos

1. Plantear las ecuaciones que constituyen el modelo.
2. Resolver el modelo implementando el método de Euler explícito.

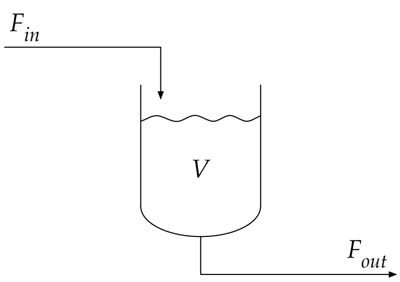

Figura 1.1: Depósito con salida por gravedad.

3. Comparar los resultados en función del paso de integración.
4. Dibujar las curvas de evolución del sistema.

1.2 Modelo matemático

Leyenda

F_{in}: Caudal de entrada al depósito (m^3/h).

F_{out}: Caudal de salida del depósito (m^3/h).

V: Volumen en el depósito (m^3)

h: Altura de líquido en el depósito (m).

A: Área del depósito (m^2).

A_s: Área de la tubería de salida (m^2).

g: Gravedad (m/s^2).

Balance de materia

Puesto que el líquido que entra y el que sale son el mismo se puede suponer que no hay variaciones de densidad, por lo que el balance de materia se puede realizar en volumen, por tanto

$$\frac{dV}{dt} = F_{in} - F_{out} \tag{1.1}$$

pero el volumen de líquido en el reactor viene dado por

$$V = h \cdot A \tag{1.2}$$

y como la sección del depósito es constante

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(h \cdot A) = A\frac{dh}{dt} \tag{1.3}$$

el balance de materia quedaría

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A}(F_{in} - F_{out}) \tag{1.4}$$

Ecuación auxiliar

La salida del depósito por el fondo se produce, únicamente por efecto de la gravedad, por lo que

$$F_{out} = A_s \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \tag{1.5}$$

No obstante, puesto que la gravedad está expresada en $\mathrm{m/s^2}$ y el caudal debe expresarse en $\mathrm{m^3/h}$, se debe utilizar un factor de conversión (3600 s/h), por lo que

$$F_{out} = 3600 \cdot A_s \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \tag{1.6}$$

Método de Euler explícito

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{cases} y'(t_j) = f(t_j, y(t_j)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.7}$$

aplicando la aproximación forward de la derivada

$$\frac{y_h(t_{j+1}) - y_h(t_j)}{h} = f(t_j, y(t_j)) \tag{1.8}$$

por lo que

$$y_h(t_{j+1}) = y_h(t_j) + h \cdot f(t_j, y(t_j)) \tag{1.9}$$

en donde h es el paso del método.

Por tanto, para determinar el valor de la solución en un instante $y_h(t_{j+1})$ se utiliza el valor de la solución en el instante anterior $y_h(t_j)$ y el valor de la derivada también en el instante anterior $f(t_j, y(t_j))$.

1.3 Simulación

De acuerdo con las ecuaciones anteriores —tanto del modelo matemático del sistema como del método de integración— se puede realizar la simulación del sistema. Puesto que se conoce la altura inicial del sistema, se realizará la integración partiendo de ese valor ($h(0) = 1$ m) durante 5 horas. Para ver la influencia del paso de integración se utilizarán cuatro pasos diferentes: 1 hora, 0,5 horas, 0,25 horas y 0,1 horas. La evolución del sistema para cada uno de estos pasos es la mostrada en la Figura 1.2.

Con un paso de integración de 1 hora, sólo se tienen cinco intervalos o pasos en los que se realiza la integración. El método numérico se vuelve inestable y conduce a una solución del sistema altamente imprecisa e inestable. De

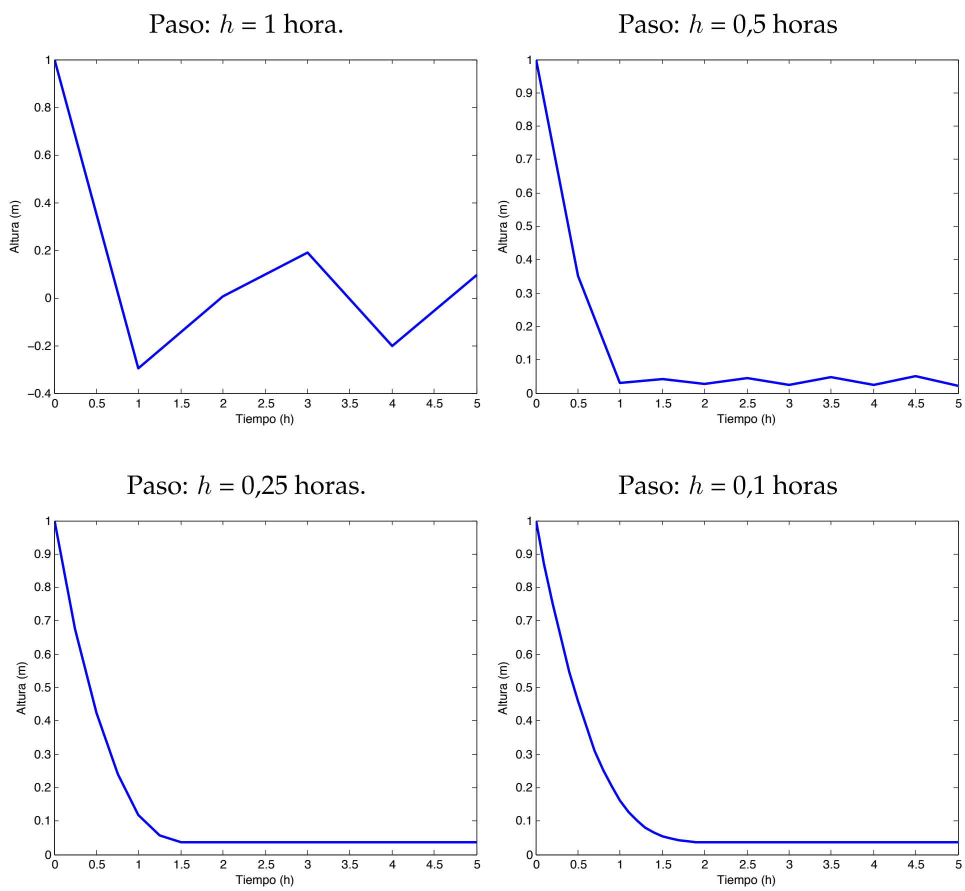

Figura 1.2: Simulación con diferentes pasos de integración.

hecho, el método proporciona valores de altura de líquido en el depósito negativas y oscilaciones en el régimen permanente.

Si se reduce a la mitad el paso de integración, esto es, 0,5 horas, el método gana algo de precisión pero sigue siendo inestable en régimen permanente, produciéndose oscilaciones continuas en dicho régimen. Se trata, por tanto, de otro paso de integración inadecuado para este sistema.

Volviendo a reducir a la mitad el paso de integración y, por tanto, siendo su valor 0,25 horas, se consigue un comportamiento del método mucho más estable, desapareciendo las oscilaciones en régimen permanente. Dicho comportamiento se repite cuando el paso de integración es de 0,1 horas. La diferencia con el paso anterior reside en la precisión de la solución en régimen transitorio, ya que en régimen permanente proporcionan la misma solución.

1.4 m-files

Método de Euler explícito

```
function [t,x] = euler_exp(odefun,time,x0,n)

t0 = time(1);     % Instante inicial de integracion
tf = time(2);     % Instante final de integracion

h = (tf-t0)/n;    % Paso de integracion

t = (t0:h:tf); % Vector de tiempos de integracion

% Primer punto de integracion
x(1) = x0;

for i = 2:(n+1)
    % Algoritmo de Euler para la integracion
    x(i) = x(i-1) + h*feval(odefun,t(i-1),x(i-1));
end
```

Modelo matemático del depósito

```
function dh_dt = deposito(t,h);

Fin = 3;     % Caudal de entrada en m3/h
A = 10;      % Area del deposito en m2
As = 0.001; % Area de salida en m2
g = 9.81;    % Gravedad en m/s2

% Caudal de salida
if h < 0
    Fout = 0;
```

```
else
    Fout = As*3600*sqrt(2*g*h);
end

% Balance de materia
dh_dt = (Fin - Fout)/A;
```

Cuerpo principal del programa

```
close all;
clear all;
clc;

time = [0 5]; % Tiempo de integracion en h
h0 = 1;       % Altura inicial en m
% Numero de intervalos en el tiempo de integracion
n=input('Introduce el numero de intervalos \n');

% Integracion con Euler
[t,h] = euler_exp('deposito',time,h0,n);

% Representacion grafica
plot(t,h,'linewidth',2)
xlabel('Tiempo (h)')
ylabel('Altura (m)')
```