

Capítulo 2

Depósitos en serie

2.1 Enunciado

Se dispone de dos depósitos conectados por el fondo según se ilustra en la Figura 2.1. La salida de los dos tanques es por gravedad. Cada depósito tiene un caudal de entrada. Se quiere modelar y simular el comportamiento de este sistema teniendo en cuenta los siguientes datos:

- Altura inicial de líquido en el primer depósito: 0,8 m
- Altura inicial de líquido en el segundo depósito: 0,2 m
- Caudal de entrada al primer depósito: $2,2 \text{ m}^3/\text{h}$
- Caudal de entrada al segundo depósito: $1,6 \text{ m}^3/\text{h}$

Los dos depósitos son idénticos, teniendo un área de 10 m^2 y teniendo la tubería que les conecta como la de salida del segundo depósito un área de $0,001 \text{ m}^2$.

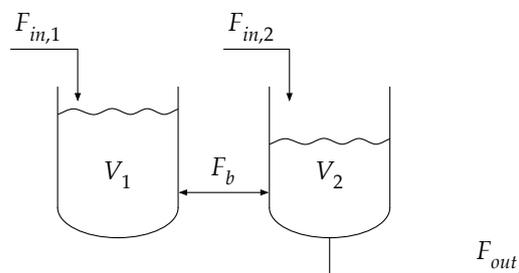


Figura 2.1: Depósitos conectados por el fondo.

Objetivos

1. Plantear las ecuaciones que constituyen el modelo.
2. Resolver el modelo implementando el método de Runge-Kutta de orden 4.
3. Comparar los resultados en función del paso de integración.
4. Dibujar las curvas de evolución del sistema.

2.2 Modelo matemático

Leyenda

$F_{in,1}$: Caudal de entrada al primer depósito (m^3/h).

$F_{in,2}$: Caudal de entrada al segundo depósito (m^3/h).

F_b : Caudal entre ambos depósitos (m^3/h).

F_{out} : Caudal de salida del segundo depósito (m^3/h).

V_1 : Volumen de líquido en el primer depósito (m^3).

V_2 : Volumen de líquido en el segundo depósito (m^3).

A : Área de la sección de ambos depósitos (m^2).

A_s : Sección de tubería de salida de ambos depósitos (m^2).

h_1 : Altura de líquido en el primer depósito (m).

h_2 : Altura de líquido en el segundo depósito (m).

g : Gravedad (m/s^2).

Balances de materia

Considerando constante la densidad, puesto que no hay variaciones de temperatura ni de composición, el balance de materia se puede realizar en volumen, por lo que, para el primer depósito quedaría

$$\frac{dV_1}{dt} = F_{in,1} - F_b \quad (2.1)$$

y para el segundo sería

$$\frac{dV_2}{dt} = F_{in,2} + F_b - F_{out} \quad (2.2)$$

No obstante, puesto que la sección de ambos depósitos es constante, se tiene que

$$V = A \cdot h \implies \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(A \cdot h) = A \frac{dh}{dt} \quad (2.3)$$

por lo que los balances de materia a ambos depósitos quedarían

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{1}{A}(F_{in,1} - F_b) \quad (2.4)$$

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{1}{A}(F_{in,2} + F_b - F_{out}) \quad (2.5)$$

Ecuaciones auxiliares

La salida en ambos depósitos se produce por gravedad. En el segundo depósito es descarga libre, por lo que

$$F_{out} = A_s \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h_2} \quad (2.6)$$

y, puesto que la gravedad está expresada en m/s^2 es necesario utilizar un factor de conversión (3600 s/h) para expresar el caudal en m^3/h , por lo que

$$F_{out} = 3600 \cdot A_s \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h_2} \quad (2.7)$$

En el primer depósito, la salida se produce por gravedad, pero también influye la altura de líquido en el segundo, de hecho, puede darse el caso de que, transitoriamente, el flujo de líquido se produzca del segundo depósito hacia el primero. Esta situación ocurrirá cuando el nivel en el segundo depósito sea mayor que en el primero, por lo que deben considerarse ambos casos:

$$F_b = \begin{cases} +A_s \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (h_1 - h_2)} & \text{si } h_1 \geq h_2 \\ -A_s \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (h_2 - h_1)} & \text{si } h_1 < h_2 \end{cases} \quad (2.8)$$

Método de Runge-Kutta explícito de orden 4

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{cases} y'(t_j) = f(t_j, y(t_j)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.9)$$

se realiza el desarrollo de Taylor de orden 4, de modo que

$$y_h(t_{j+1}) = y_h(t_j) + \frac{1}{6}K_1 + \frac{1}{3}K_2 + \frac{1}{3}K_3 + \frac{1}{6}K_4 \quad (2.10)$$

en donde

$$K_1 = h \cdot f(t_j, y_h(t_j)) \quad (2.11)$$

$$K_2 = h \cdot f(t_j + \frac{h}{2}, y_h(t_j) + \frac{1}{2}K_1) \quad (2.12)$$

$$K_3 = h \cdot f(t_j + \frac{h}{2}, y_h(t_j) + \frac{1}{2}K_2) \quad (2.13)$$

$$K_4 = h \cdot f(t_j + \frac{h}{2}, y_h(t_j) + \frac{1}{2}K_3) \quad (2.14)$$

2.3 Simulación

Las ecuaciones anteriores para el modelo matemático, así como para el método matemático de integración, permiten realizar la simulación del sistema. Se dispone de los valores de las alturas iniciales en los depósitos $h_1(0) = 2,2$ m y $h_2(0) = 1,6$ m y la integración se realizará de las 5 primeras horas. Puesto que se desea evaluar la influencia del paso de integración en la estabilidad del método se tomarán cuatro pasos diferentes: 1, 0,5, 0,25 y 0,1 horas. La evolución temporal del sistema obtenida para cada uno de estos pasos es la que se recoge en la Figura 2.2.

El comportamiento que se observa es similar al obtenido para el método de Euler en lo relativo al paso de integración, esto es, para pasos de integración demasiado bajos la respuesta entregada por el método es muy mala. De hecho, el método se inestabiliza y el sistema entrega una respuesta que no se corresponde con la solución real.

Cuando el paso de integración está por debajo de la constante temporal del sistema, la respuesta que entrega el método es mejor que la del método de Euler, ya que, en el caso de Euler el error es de orden $O^2(h)$ mientras que en el método de Runge-Kutta de orden 4 el error es de orden $O^5(h)$. De hecho, muchas veces al método de Runge-Kutta de orden 4 se le denomina método Runge-Kutta 45; 4 por el orden del desarrollo y 5 por el del error.

En cuanto a la evolución del sistema, se observa cómo el depósito 1 se vacía rápidamente, mientras que el depósito 2, inicialmente, se llena puesto que absorbe el caudal de salida del primer depósito hasta que comienza de nuevo a vaciarse alcanzándose el régimen permanente. Nótese que el nivel en el primer depósito es mayor que en el segundo. Esto es así ya que el primer depósito descarga en el segundo, por lo que debe ser mayor el nivel para que haya flujo de materia entre ambos en el sentido del primero al segundo.

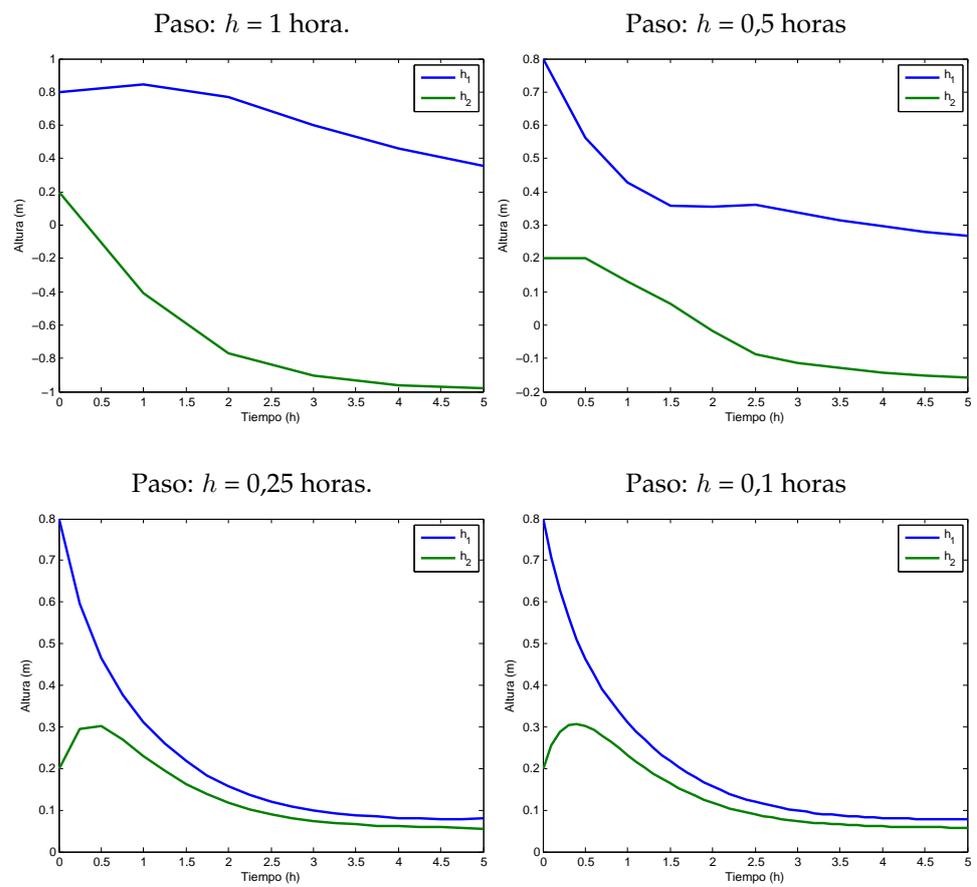


Figura 2.2: Simulación con diferentes pasos de integración.

2.4 m-file

Método de Runge-Kutta de orden 4

```
function [t,x] = runge_kutta4(odefun,time,x0,n)

t0 = time(1);    % Instante inicial de integracion
tf = time(2);    % Instante final de integracion

h = (tf-t0)/n;   % Paso de integracion

t = (t0:h:tf);   % Vector de tiempos de integracion

% Primer punto de integracion
x(1,:) = x0;

for i = 2:(n+1)
    % Algoritmo de Runge-Kutta de orden 4
    k1 = h*feval(odefun,t(i-1),x(i-1,:));
    k2 = h*feval(odefun,t(i-1)+h/2,x(i-1,:)+k1'/2);
    k3 = h*feval(odefun,t(i-1)+h/2,x(i-1,:)+k2'/2);
    k4 = h*feval(odefun,t(i-1)+h/2,x(i-1,:)+k3');
    x(i,:) = x(i-1,:) + k1'/6 + k2'/3 + k3'/3 + k4'/6;
end
```

Modelo matemático de los depósitos

```
function dx_dt = depositos(t,h)

Fin1 = 2.2; % Caudal de entrada al primer deposito en m3/h
Fin2 = 1.6; % Caudal de entrada al segundo deposito en m3/h
A = 10;     % Area de los depositos en m2
As = 0.001; % Area de salida en m2
g = 9.81;  % Gravedad en m/s2

% Caudal intermedio
if h(1) > h(2)
    Fb = 3600*As*sqrt(2*g*(h(1)-h(2)));
else
    Fb = -3600*As*sqrt(2*g*(h(2)-h(1)));
end

% Caudal de salida
if h(2) < 0
    Fout = 0;
else
    Fout = 3600*As*sqrt(2*g*h(2));
end

% Balances de materia
dx_dt(1,1) = (Fin1 - Fb)/A;
```

```
dx_dt(2,1) = (Fin2 + Fb - Fout)/A;;
```

Cuerpo principal del programa

```
close all;
clear all;
clc;

time = [0 5]; % Tiempo de integracion en h
h0 = [0.8 0.2]; % Altura inicial en m
% Numero de intervalos en el tiempo de integracion
n=input('Introduce el numero de intervalos \n');

% Integracion con Runge-Kutta orden 4
[t,h] = runge_kutta4('depositos',time,h0,n);

% Representacion grafica
plot(t,h,'linewidth',2)
xlabel('Tiempo (h)')
ylabel('Altura (m)')
legend('h_1','h_2')
```