Descomposición de Dulmage-Mendelsohn.

En lugar de actuar sobre el grafo bipartito actúa sobre la matriz de incidencia.

Descompone la matriz de incidencia en submatrices:

- Una parte sobredeterminada: indica que hay más ecuaciones que incógnitas, puede ser alguna redundante,...
- Una parte cuadrada: tiene forma de matriz triangular inferior. El subsistema está correctamente especificado y por tanto no aporta grados de libertad.
- Una parte infradeterminada: indica que hay más variables que ecuaciones y que por tanto hay un número de grados de libertad que hay que especificar. La forma de proceder es seleccionar uno, volver a realizar la descomposición de D-M y escoger otra. Así hasta que se obtiene únicamente una matriz cuadrada triangular inferior por bloques.

Algoritmo de asignación de variables de salida.

Algoritmo de Steward

- Selecciona la fila (columna) con menor número de incidencia.
- En esa fila (columna) selecciona la variable que pertenece a la columna (fila) con menor número de incidencia.
- Asigna esa variable (fila) a la ecuación (columna) y se eliminan de la matriz de incidencia.

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f_1 & f_2 & f_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} x & x & x \\ x & & \\ & x & \end{pmatrix} \end{array}$$

Asigna la variable 2 con la ecuación 1

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f_2 & f_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} x & x \\ x & \end{pmatrix} \end{array}$$

Asigna la variable 3 con la ecuación 2

Asigna la variable 1 con la ecuación 3

Algoritmo de Duff *(es una implementación más eficiente y que permite detectar singularidad estructural)*

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & f_1 & f_2 & f_3 \\
\hline
v_1 & x & x & x \\
v_2 & x & & \\
v_3 & & x &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & f_1 & f_2 & f_3 \\
\hline
v_1 & x & x & x \\
v_2 & x & & \\
v_3 & & x &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & f_1 & f_2 & f_3 \\
\hline
v_2 & x & & \\
v_1 & x & x & x \\
v_3 & & x &
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{c|ccc}
 & f_1 & f_2 & f_3 \\
\hline
v_2 & x & & \\
v_3 & & x & \\
v_1 & x & x & x
\end{array}
$$

- Va permutando las filas en función de que haya o no un cero en la diagonal de la matriz de incidencia.
- Intercambia las filas "sin perder" las asignaciones realizadas.
- En caso de no poder obtener una matriz transversal máxima (todos los elementos de la diagonal distintos de cero) el problema presenta una singularidad estructural.

$$\begin{pmatrix} & & x & \\ x & & & x \\ & x & x & \\ x & & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & & & x \\ & & x & \\ & x & x & \\ x & & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & & & x \\ & x & x & \\ & & x & \\ x & & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & & & \\ & x & x & \\ & & x & \\ x & & & x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & & & \\ & x & & \\ & x & x & \\ x & & & x \end{pmatrix}$$

Singularidad estructural

Cuando no se puede obtener un conjunto de salida la matriz es estructuralmente singular.

Implica que hay un subconjunto de ecuaciones que tiene menos variables que el número de ecuaciones del subconjunto.

La especificación de las variables de entrada puede hacer que un sistema de ecuaciones sea o no estructuralmente singular.

$$
\begin{pmatrix}
x & & & & & & \\
 & x & & & & & \\
 & & x & & & & \\
 & & x & & & & \\
 & & x & x & x & x & \\
 & & & & & x & \\
x & x & & & x & & x
\end{pmatrix}
\Longrightarrow
\begin{pmatrix}
x & & & & & & \\
 & x & & & & & \\
 & & x & & & & \\
 & & x & x & x & x & \\
x & x & & & x & & x \\
 & & & & & x & \\
 & & x & & & &
\end{pmatrix}
$$

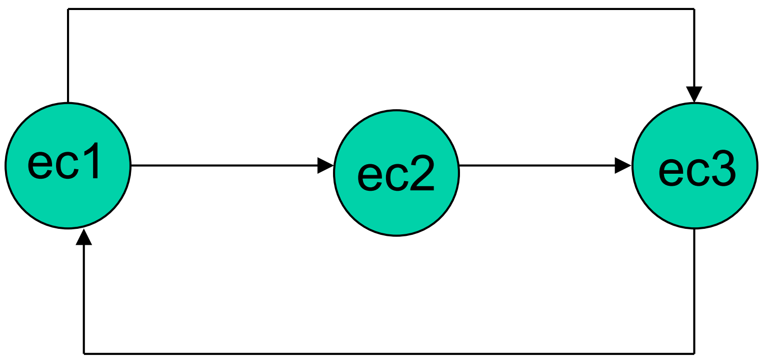
Particionado del sistema de ecuaciones y orden de resolución.

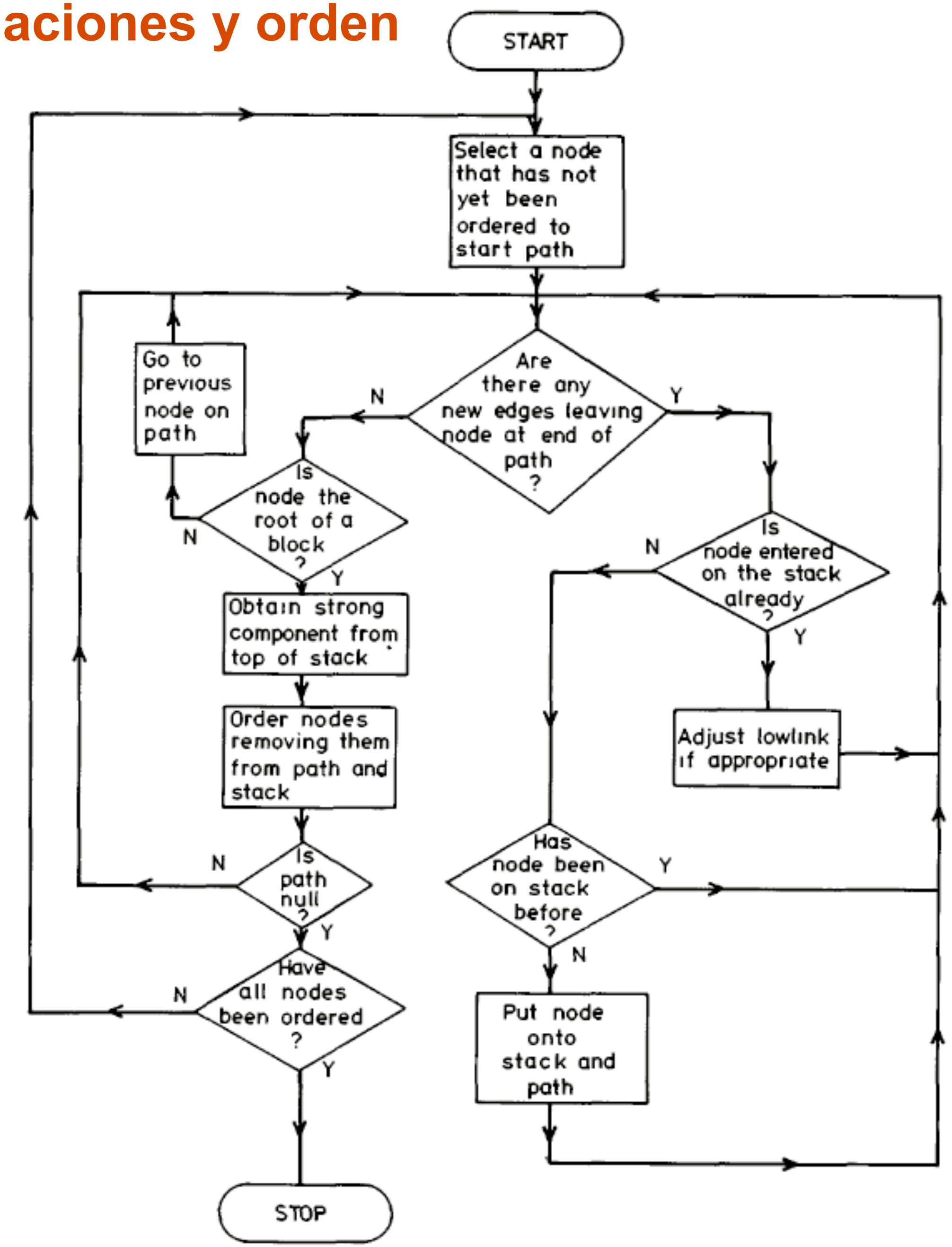
Algoritmo de Tarjan

*Más eficiente que el de Sargent y Westerberg (también aplicable). **Obtiene una matriz triangular inferior por bloques.***

Cada bloque es un sistema de ecuaciones que hay que resolver de forma simultánea.

x_1	x_2	x_3	
x	x		ec_1
	x	x	ec_2
x	x	x	ec_3

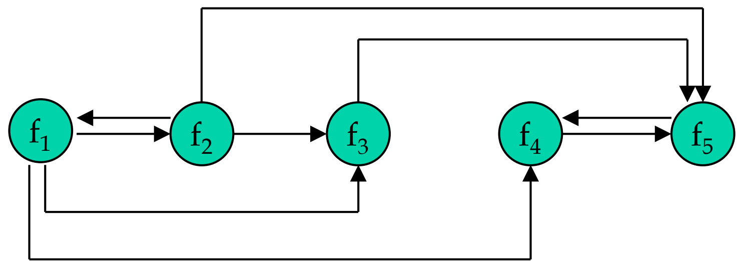




Matriz con variables de salida asignadas.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
f_1	x	x			
f_2	x	x			
f_3	x	x	x		
f_4	x			x	x
f_5		x	x	x	x

Grafo dirigido



Ejemplo del algoritmo de particionado de Tarjan.

	path	stack (lowlink)
1)	f_1	f_1
2)	f_1 f_2	f_2 f_1
3)	f_1 f_2 f_3	f_3 f_2 f_1
4)	f_1 f_2 f_3 f_5 f_4	f_4 f_5 f_3 f_2 f_1
5)	f_1 f_2 f_3 f_5 f_4	f_4 f_5 f_3 f_2 f_1
6)	f_1 f_2 f_3 f_5 f_4	f_4 f_5 f_3 f_2 f_1
7)	f_1 f_2 f_3	f_3 f_2 f_1
8)	f_1 f_2	f_2 f_1
9)	f_1 f_2	f_2 f_1
10)	f_1 f_2	f_2 f_1

Selecciona f_4 y f_5

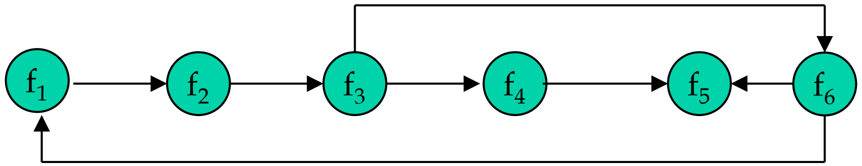
Selecciona f_3

Selecciona f_1 y f_2

Particionado y orden de resolución

$[f_2\ f_1] \rightarrow f_3 \rightarrow [f_4\ f_5]$

Realizar el particionado del siguiente sistema mediante el algoritmo de Tarjan

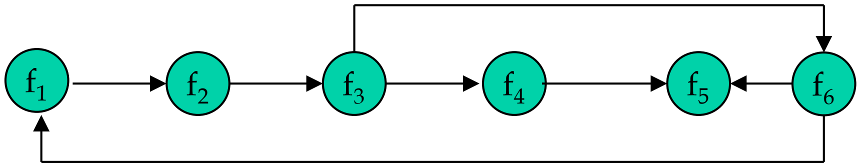


Realizar el particionado del siguiente sistema mediante el algoritmo de Tarjan y Duff

$$
\begin{array}{c}
\\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccc}
x & x & & & \\
 & & x & x & \\
x & x & x & & \\
 & & x & & \\
x & & & & x
\end{array}\right]
\end{array}
$$

$$\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{array} \begin{bmatrix} x & x & & & \\ & & x & x & \\ x & x & x & & \\ & & x & & \\ x & & & & x \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{array} \begin{bmatrix} x & x & & & \\ x & x & x & & \\ & & x & x & \\ & & x & & \\ x & & & & x \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{array} \begin{bmatrix} x & x & & & \\ x & x & x & & \\ & & x & & \\ & & x & x & \\ x & & & & x \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{array} \begin{bmatrix} x & x & & & \\ x & x & x & & \\ & & x & & \\ & & x & x & \\ x & & & & x \end{bmatrix}$$



$f_1\ f_2\ f_3\ f_4\ f_5$

f_5
f_4
f_3
f_2
f_1

$f_1\ f_2\ f_3\ f_6$

f_6
f_3
f_2
f_1

$[f_1\ f_2\ f_3\ f_6] \longrightarrow f_4\ f_5$

$f_1\ f_2\ f_3\ f_6$

f_6
f_3
f_2
f_1

Ejemplo: cambiador contracorriente.

$$F_1 = F_2$$

$$F_3 = F_4$$

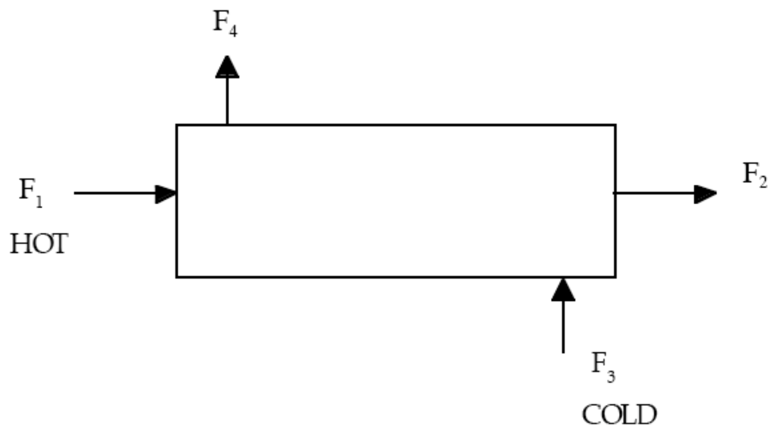
$$F_1 C_p T_1 = F_1 C_p T_2 + Q$$

$$F_3 C_p T_3 + Q = F_3 C_p T_4$$

$$Q = UA\Delta T_{LM}$$

$$\Delta T_{LM} = \frac{(T_1 - T_4) - (T_2 - T_3)}{ln\frac{(T_1 - T_4)}{(T_2 - T_3)}}$$

$$U = U(F_1, \ldots, F_4, T_1 \ldots, T_4, K)$$



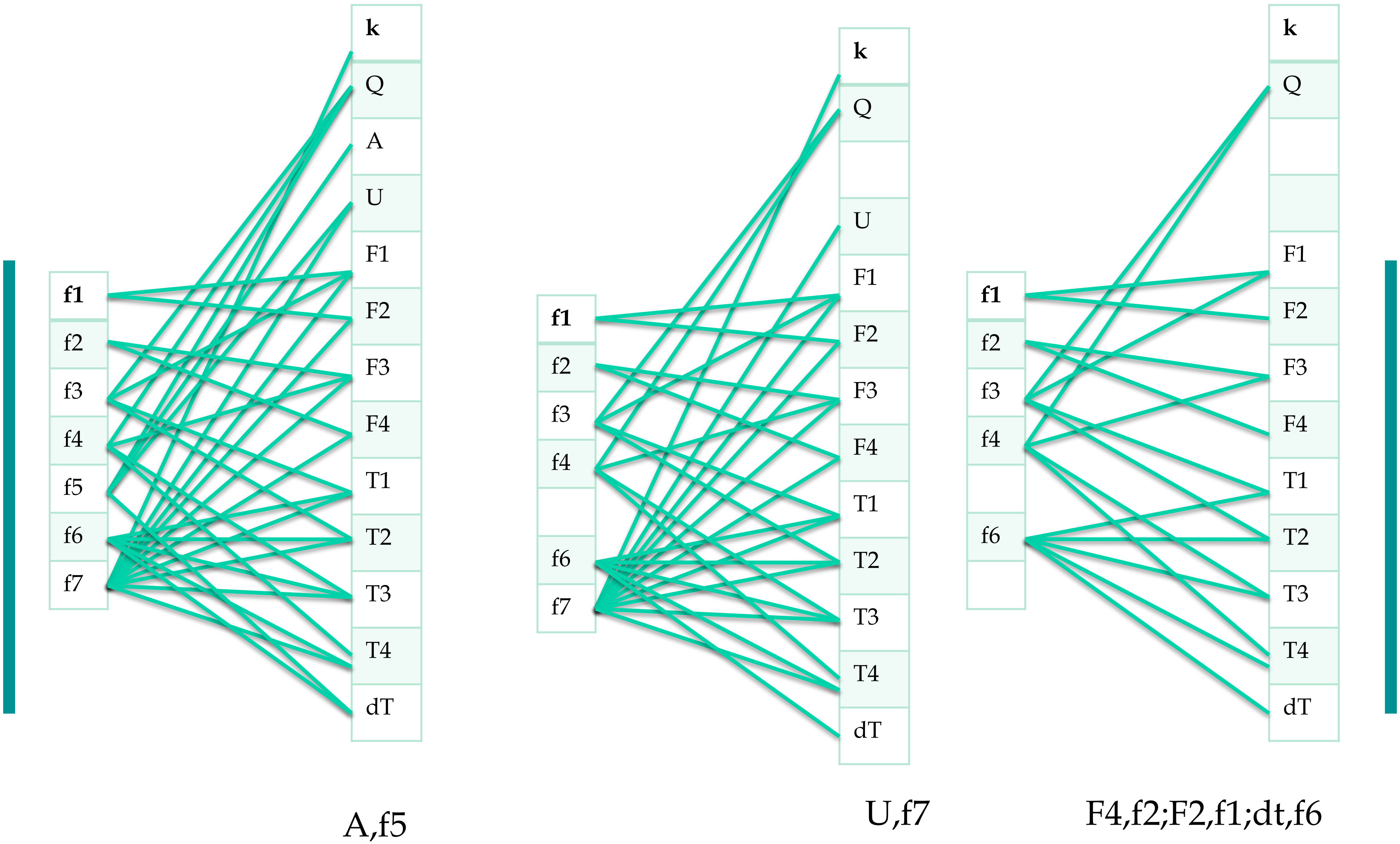
Matriz de incidencia

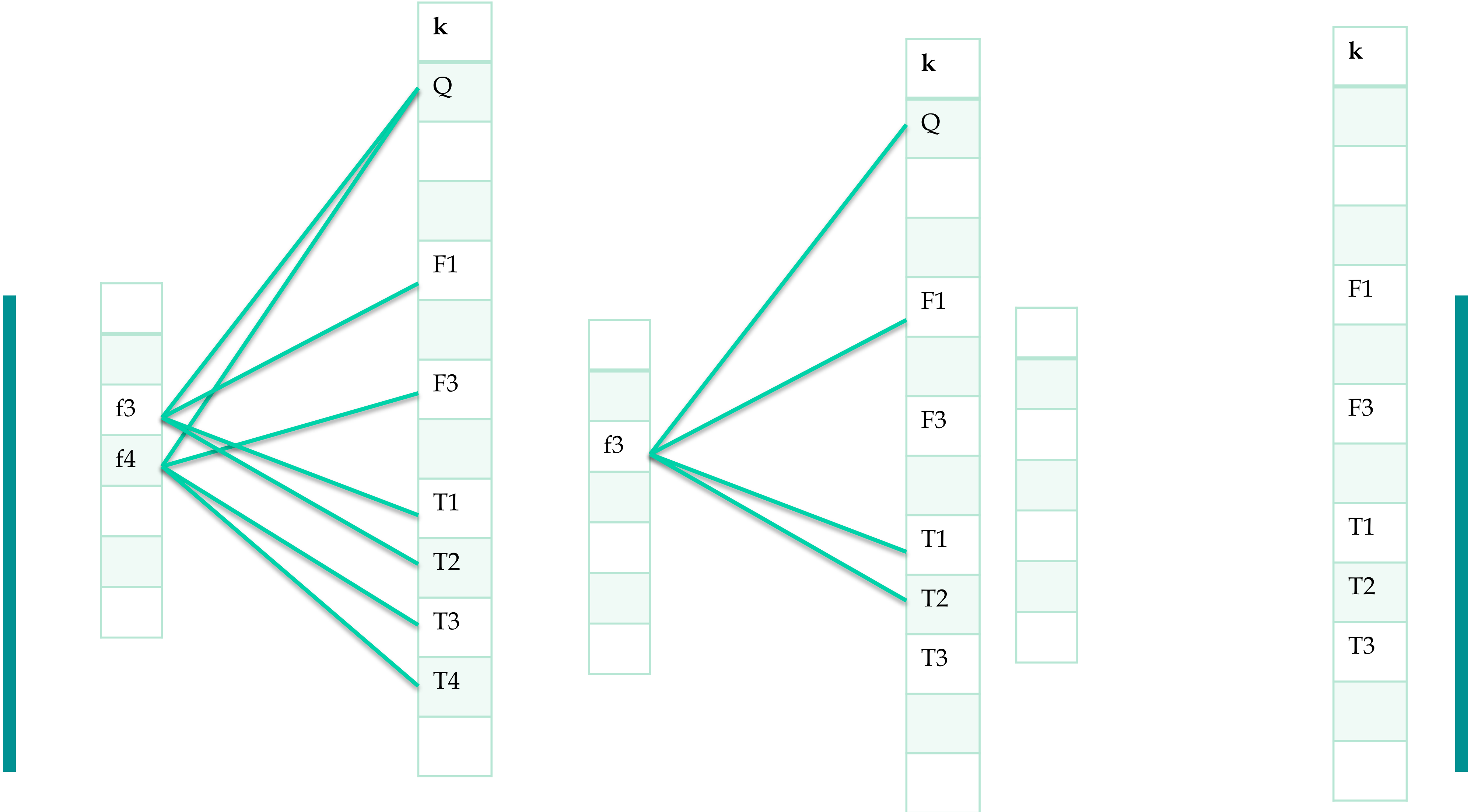
$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccccc} K & Q & A & U & F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & \Delta T_{lm} \end{array} \\
\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{array} &
\left[\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & \times & \times & & & & & & & \\
 & & & & & & \times & \times & & & & & \\
 & \times & & & \times & & & & \times & \times & & & \\
 & \times & & & & & \times & & & & \times & \times & \\
 & \times & \times & \times & & & & & & & & & \times \\
 & & & & & & & & \times & \times & \times & \times & \times \\
\times & & & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times &
\end{array}\right]
\end{array}$$

Pasos:

1. Asignar variables de entrada (alg. Christensen-Rudd)
2. Asignar conjunto de salida (alg. Duff)
3. Particionar y definir orden de resolución (alg. Tarjan)

1. Asignar variables de entrada (alg. Christensen-Rudd)





T4,f4

Q,f3

$$
\begin{array}{c@{}c}
 & \begin{array}{ccccccccccccc} K & Q & A & U & F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & \Delta T_{lm} \end{array} \\
\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{array} &
\left[\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & \times & \times & & & & & & & \\
 & & & & & & \times & \times & & & & & \\
 & \times & & & \times & & & & \times & \times & & & \\
 & \times & & & & & \times & & & & \times & \times & \\
 & \times & \times & \times & & & & & & & & & \times \\
 & & & & & & & & \times & \times & \times & \times & \times \\
\times & & & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times &
\end{array}\right]
\end{array}
$$

2. Asignar conjunto de salida (alg. Duff)

	Q	A	U	F2	F4	T4	dT
f1				**x**			
f2					x		
f3	x						
f4	x					x	
f5	x	x	x				x
f6						x	x
f7			x	x	x	x	

	Q	A	U	F2	F4	T4	dT
f3	**x**						
f5	x	x	x				x
f1				x			
f4	x					x	
f2					x		
f6						x	x
f7			x	x	x	x	

	Q	A	U	F2	F4	T4	dT
f3	**x**						
f5	x	x	x				x
f7			x	x	x	x	
f4	x					x	
f2					x		
f6						x	x
f1				x			

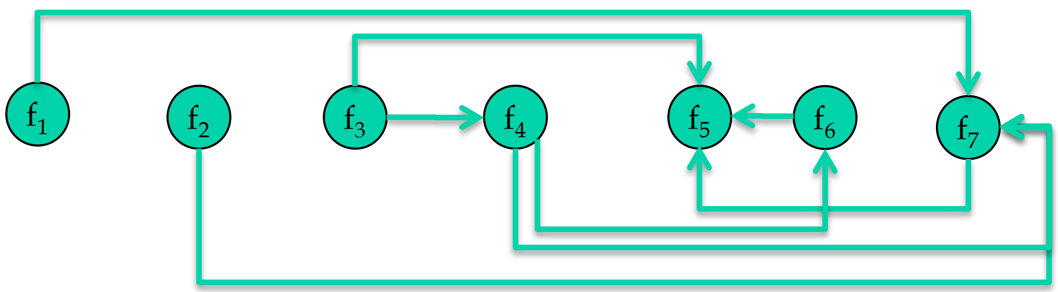
	Q	A	U	F2	F4	T4	dT
f3	**x**						
f5	x	x	x				x
f7			x	x	x	x	
f1				x			
f2					x		
f6						x	x
f4	x					x	

	Q	A	U	F2	F4	T4	dT
f3	**x**						
f5	x	x	x				x
f7			x	x	x	x	
f1				x			
f2					x		
f4	x					x	
f6						x	x

	Q	A	U	F2	F4	T4	dT
f3	**x**						
f5	x	x	x				x
f7			x	x	x	x	
f1				x			
f2					x		
f4	x					x	
f6						x	x

3. Particionar y definir orden de resolución (alg. Tarjan)

f3	x						
f5	x	x	x				x
f7			x	x	x	x	
f1				x			
f2					x		
f4	x					x	
f6						x	x



f_3 f_4 f_6 f_2 f_1 f_7 f_5

Singularidad funcional

Singularidad funcional implica que el Jacobiano es singular para cualquier valor de las variables, x. Ejemplo:

$$x_1 + x_2 - 3 = 0$$
$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - k = 0$$

$$J(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x_1 + 2x_2 & 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

La causa de singularidad funcional suele ser un **modelo mal construido** o con un conjunto de **especificaciones mal seleccionado**:

- O es redundante lo que implica un número infinito de soluciones.
- O es inconsistente lo que implica que no existe una solución.

En el ejemplo anterior

si k=-9 el sistema es redundante

si k<>-9 el sistema es inconsistente

Singularidad numérica (o local)

El Jacobiano es singular sólo para algunos valores de las variables.

Sistema de ecuaciones no lineales

Orientado a ecuaciones

Asignación de variables de entrada
(Lee-Christensen-Rudd)
(Dulmage-Mendelsohn decomposition)

↓

Output assignment
(Steward)
(Duff) (y detecta singularidad estructural)
Particionado (matriz de incidencia)
Busca matriz triangular
Orden de resolución
(Tarjan)
(Sargent&Westerberg)

↓

Incialización

↓

Resolución del sistema.
Cada sistema (bucle algebraico):
Wegstein
Aprox. Sucesivas
Newton
Broyden

↓

Resolución de LAEs
(métodos Gaussianos)

Secuencial Modular

Variables de entrada asignadas

↓

Particionado (identificación de ciclos)
Orden de resolución
(Norman)
(Keham & Sachem)
(Sargent&Westerberg)
(Tarjan)

↓

Selección de variables de corte (tear)
(Barkeley & Motard)
(Westerberg&Motard)
(Upadyhe&Grens)(Mejor convergencia)
(Christensen&Rudd)

↓

Resolución del sistema: 3 niveles
En cada módulo:
Propiedades físicas
Ecuaciones del módulo
Diagrama de flujo

↓

Wegstein
Aprox. Sucesivas
Newton
Broyden

↓

Resolución de LAEs
(métodos Gaussianos)